

Федеральное агентство по образованию  
Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
Высшего профессионального образования  
«ВОСТОЧНО - СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**М.Ш. Агалов**

**ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ УСТОЙЧИВОСТИ  
СООРУЖЕНИЙ**

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения  
специальности  
«Промышленное и гражданское строительство»

Издательство ВСГТУ  
Улан-Удэ  
2006

Учебное пособие\* предназначено для студентов заочной формы обучения специальности «Промышленное и гражданское строительство». Оно охватывает вопросы устойчивости сооружений входящие в программу курса «Строительная механика». Для облегчения самостоятельного обучения оно сопровождается практическими примерами.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 1. Виды равновесия. Потеря устойчивости. Критическая сила

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает не достаточно, для того чтобы получить полное представление об их надежности. Системы, применяемые в качестве строительных конструкций под действием нагрузки должны находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Это означает, что если какие-либо случайные причины выведут систему из равновесия, то после удаления этих причин система должна вернуться в первоначальное положение.

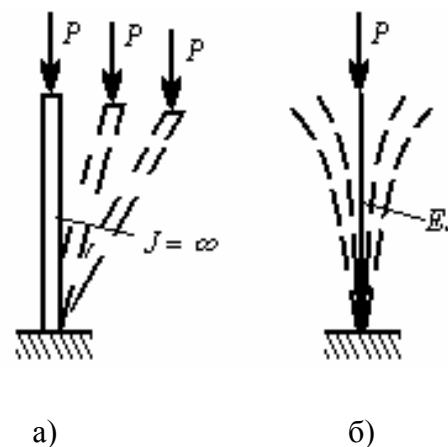


Рис. 1

Если вертикальный столб (рис.1,а), свободно опертый на землю, находится в равновесии под действием центрально приложенной силы  $F$  и при небольшом отклонении вернуться в исходное положение уже не может, то это равновесное состояние является неустойчивым. Если упругий тонкий стержень

(рис.1,б), жестко защемленный в основании, после отклонения, поколебавшись вокруг вертикального положения, займет первоначальное положение, то его равновесие является устойчивым. При заданной схеме нагрузки и заданной схеме сооружения устойчивость равновесного состояния зависит

\* Работа поддержана программой «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники» (проект № 01.01.114).

от величины нагрузки. В каждом отдельном случае можно найти ту нагрузку, при которой устойчивая первоначальная форма равновесия становится неустойчивой и возможно другое, качественно новое, деформированное состояние, тоже являющееся состоянием равновесия. Выход системы из устойчивого первоначального состояния равновесия называется потерей устойчивости, а нагрузка, при небольшом превышении которой возможно осуществление новой формы равновесия, называется критической силой (нагрузкой).

Обеспечение устойчивости строительных конструкций особенно важно, потому что сам процесс потери устойчивости происходит очень быстро и практически ведет к разрушению сооружений. Имевшие место аварии крупных инженерных сооружений в большинстве случаев происходили не от того, что не была обеспечена прочность отдельных элементов, а от того, что не была обеспечена устойчивость сооружения.

Существование критической силы известно давно. Первые исследования в этой области принадлежат гениальному математику всех времен и народов Л. Эйлеру (1744 г.). Работы Эйлера сначала не нашли себе применения и были забыты техника того времени не нуждалась в конструкциях в элементах которых два размера значительно превосходили третий. К тому же сам метод Эйлера был очень своеобразен и мало понятен для современников. Долгое время полагали, что эти решения Эйлера не имеют никакого реального значения, что это просто причуды великого математика.

Лишь во второй половине XIX века строгий математический анализ этого вопроса, а также результаты опытов показали, что Эйлер был прав. Вызвано это тем, что в то время при построении мостов и других крупных металлических сооружений начали усиленно применять такие стержни и

пластины, для которых расчет на устойчивость играет доминирующую роль.

Существование нескольких форм равновесия имеет место для тел, у которых один или два размера малы по сравнению с третьим. Одни из таких форм равновесия будут устойчивы, другие неустойчивы.

Для технических целей важно знать, какие из форм равновесия являются устойчивыми, т.к. они кладутся в основание расчетов на прочность. В подобных случаях необходимо знать не только самую форму равновесия, но и величину критической силы. Таким образом, целью расчетов на устойчивость является нахождение критической силы и формы потери устойчивости. Для упругих систем существует несколько значений критических сил  $P_{кр}$  (в зависимости от числа степеней свободы). Из них для технических целей важно наименьшее значение  $P_{кр}$ . Высшие критические силы в большинстве случаев не представляют ни какого практического интереса.

## 2. Виды потери устойчивости

Различают потери устойчивости первого и второго рода.

На рис.2(а, б, с, d) показана новая изогнутая форма равновесия после потери устойчивости - это есть потеря устойчивости центрального сжатия. На рис.2(е) показана потеря устойчивости плоской формы изгиба балки с поперечным сечением в виде узкой полосы, с деформацией кручения. Все примеры (рис.2) характерны тем, что в момент потери устойчивости появляется новый вид деформации, качественно отличный от первоначального. Принято называть потерю устойчивости, характеризующую появлением качественно

новых деформаций, потерей устойчивости первого рода (или потерей устойчивости по Эйлеру).

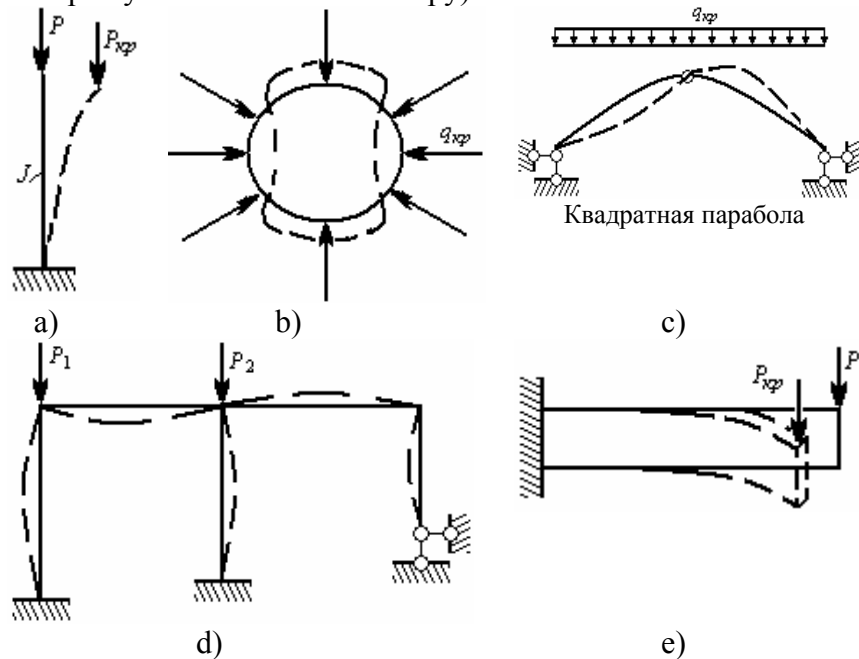


Рис. 2

На рис.3(а, б, с) показаны внецентренно сжатая стойка, арка и рама, элементы которой с самого начала находятся под воздействием продольных сил и изгибающих моментов.

При малых нагрузках влияние продольных сил на деформацию невелико и приращение  $\Delta$  почти пропорционально приращению нагрузки. С увеличением нагрузки влияние продольных сил возрастает и в какой-то момент пропорциональность между деформацией и нагрузкой резко нарушается, деформации начинают расти во много раз быстрее, чем нагрузка.

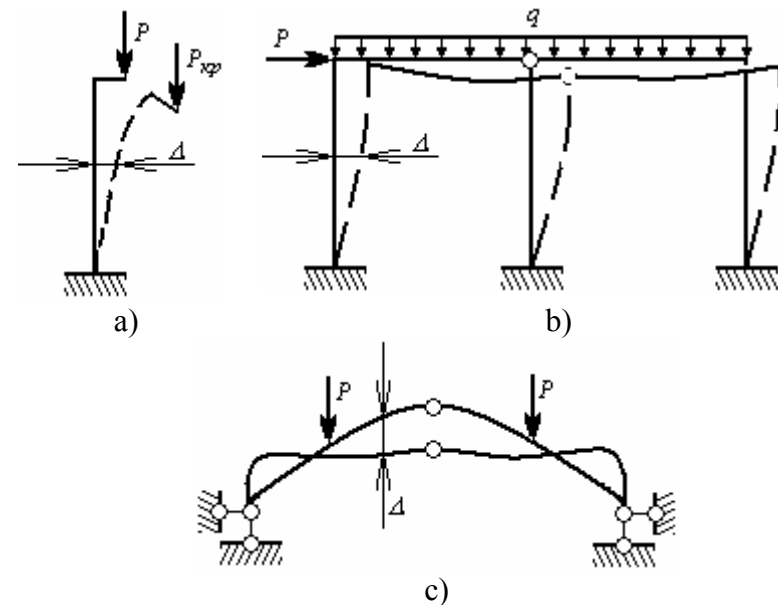


Рис. 3

Может наступить такой момент, когда увеличения нагрузки не требуется для роста деформации, они будут расти даже при уменьшении нагрузки. Рост деформации при отсутствии приращения нагрузки, можно рассматривать как потерю устойчивости второго рода, она связана с потерей несущей способности сооружения.

### 3. Методы исследования устойчивости

Основными методами исследования устойчивости являются статический, энергетический и динамический.

### 3.1. Статический метод

Сущность его состоит в следующем: поскольку система находится в равновесии, в равновесии находится и любой (в том числе бесконечно малый) элемент этой системы. Отклоненное положение равновесия определяется перемещениями его точек. Для систем с конечным числом степеней свободы перемещение системы определяется перемещениями конечного числа точек, поэтому число алгебраических уравнений, определяющих положение системы, будет конечным.

Пример. На рисунке 4 опоры А и В неподатливые, а С и D упругоподатливые (пружины) с коэффициентом жесткости  $r_{II}$  (реакция при единичном вертикальном смещении).

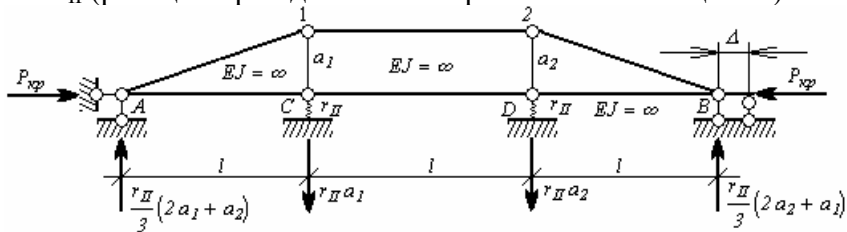


Рис. 4

Отклоненная форма равновесия определяется перемещениями точек С и D (система имеет две степени свободы). В силу этого число алгебраических уравнений будет равно двум, что, соответственно, дает два значения  $P_{кр}$ .

$$\sum m_1^{лев} = 0 \quad \begin{cases} \frac{r_{II}}{3}(2a_1 + a_2)l - P_{кр} a_1 = 0 \\ \frac{r}{3}(a_1 + 2a_2)l - P_{кр} a_2 = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} (2r_{II}l - 3P_{кр})a_1 - r_{II}la_2 = 0 \\ r_{II}la_1 + (2r_{II}l - 3P_{кр})a_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1 \neq 0 \\ \text{т.к.} \\ a_2 \neq 0 \end{matrix}$$

и система имеет решение:

$$D = \begin{vmatrix} 2r_{II}l - 3P_{кр} & 2l \\ r_{II}l & 2r_{II}l - 3P_{кр} \end{vmatrix} = 0$$

$$(2r_{II}l - 3P_{кр})^2 - (r_{II}l)^2 = 0, \quad \text{отсюда, } P_{кр}^I = \frac{r_{II}l}{3}, \quad P_{кр}^I = r_{II}l$$

из которых расчетное  $P_{кр} = \frac{r_{II}l}{3}$ .

Форма потери устойчивости получится, если подставим значение  $P_{кр}$  в одно из уравнений (\*).

$$(2r_{II}l - r_{II}l)a_1 - r_{II}la_2 = 0, \quad a_1 = -a_2 \quad \text{при } P_{кр} = r_{II}l \quad \text{имеем}$$

$$(2r_{II}l - 3r_{II}l)a_1 - r_{II}la_2 = 0, \quad a_1 = a_2$$

Форма потери устойчивости представлена на рисунке 5 а, б.

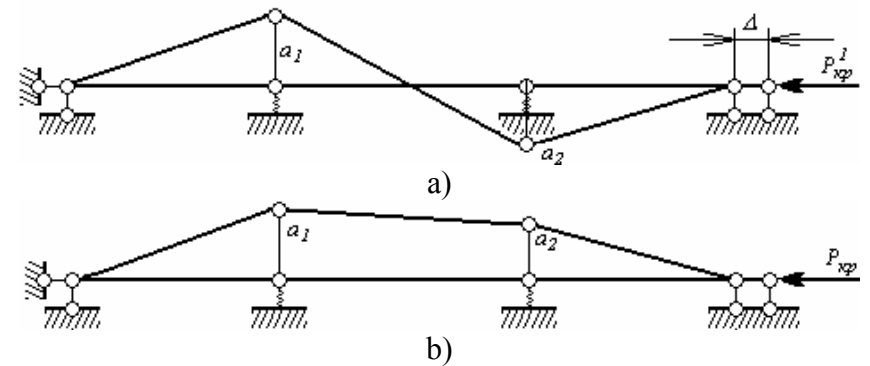


Рис. 5

Для системы с бесконечно большим числом степеней свободы система однородных алгебраических уравнений содержит бесконечно большое число неизвестных и, как из-

вестно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением.

Пример (Рис.6). При значении  $P=P_{кр}$  стержень теряет устойчивость и изгибается в плоскости наименьшей жесткости.

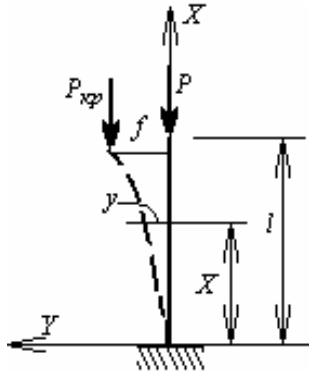


Рис. 6

Составим дифференциальное уравнение изгиба для малых отклонений от прямоугольной формы равновесия. При малых перемещениях в качестве уравнений изгиба можно принимать приближенные линейные дифференциальные уравнения.

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $X$  определяется по выражению:

$$M = P_{кр}(f - y).$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси :

$$EJy'' = M = P_{кр}(f - y);$$

$$y'' + k^2 y = k^2 f; \quad (*) \quad \text{где: } k^2 = \frac{P_{кр}}{EJ};$$

Решение этого уравнения  $y = y_1 + y_2$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$y_1 = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

ищем частное решение. Положим  $y_2 = A$ , тогда  $y_2'' = 0$ .

Подставим  $y_{част.} = y_2$  в дифференциальное уравнение, получим

$$0 + k^2 A = k^2 f; \quad \text{откуда} \quad A = y_2 = f, \quad \text{а}$$

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + f \quad ***$$

Таким образом, уравнение изгиба (\*\*\*) содержит три произвольные величины  $C_1$ ,  $C_2$  и  $f$ ; для их определения имеем три граничных условия:

При  $x = 0$ ; прогиб  $y = 0$  и угол поворота  $y' = 0$

При  $x = e' \quad y = f$

$$0 = C_1 + f \quad C_1 = -f$$

$$0 = C_2 k \quad k_2 \neq 0 \quad C_2 = 0$$

$$f = C_1 \cos ke + C_2 \sin ke + f$$

$$0 = -f \cos ke = 0 \quad f \neq 0$$

$$\cos ke = 0; \quad \text{откуда} \quad ke = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \dots$$

Низшее значение критической силы при  $ke = \frac{\pi}{2}$

$$k = \frac{\pi}{2l^2}; \quad \frac{\pi^2}{4l^2} = \frac{P_{кр}}{EJ}; \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

### 3.2. Энергетический метод

Энергетические признаки устойчивого и неустойчивого равновесия твердого тела следующие.

Всякому возможному отклонению тела от его устойчивого равновесия соответствует возрастание потенциальной энергии положения и, наоборот, убывание потенциальной энергии – отклонение от неустойчивого равновесия.

Аналогичные признаки устойчивого и неустойчивого равновесия имеют место и в упругом теле если при любом возможном (малом) отклонении стержня от заданной формы равновесия потенциальная энергия системы возрастает, то форма равновесия будет устойчивой, и наоборот, при убы-

вании потенциальной энергии заданное равновесие будет неустойчивым.

Критическому состоянию будет соответствовать случай, когда потенциальная энергия при малых возможных отклонениях от заданной формы равновесия остается постоянной.

Исследуем переход от начального равновесного к изогнутому и определим приращение потенциальной энергии деформации, а также работу внешних сил. Если энергия деформации окажется больше работы внешних нагрузок, то очевидно, система будет возвращаться к начальному положению равновесия, следовательно, это положение можно считать устойчивым. В противном случае положение неустойчиво. При безразличном равновесии приращение энергии деформации должно быть равно работе внешних сил.

Исходя из вышеизложенного, критическую силу можно определить следующими способами.

### 3.2.1. Способ равенство работ внешних и внутренних сил при деформировании

Представим себе, что сжатый стержень (рис. 7) слегка покривился. Потенциальная энергия несколько возросла: к энергии сжатия присоединилась энергия изгиба. Первую при малых отклонениях стержня от прямолинейной формы можно считать неизменившейся. Указанное искривление стержня будет сопровождаться опусканием груза  $P$  на  $\Delta$ , т.е. уменьшением энергии системы. Пусть  $A$  будет уменьшение энергии, равное работе опускающегося груза. Прямолинейная форма равновесия сжатого стержня будет устойчива, если приращение потенциальной энергии  $W$  при отклонении его от положения равновесия будет положительно, т.е. если

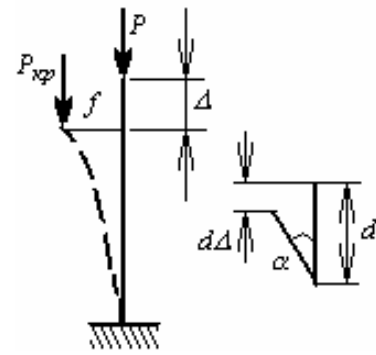


Рис. 7

$W > A$ , и неустойчиво, если  $W < A$ . Критическая сила найдется из условия  $W = A$ .

При расчете необходимо задаваться возможной формой потери устойчивости. Это является недостатком метода, так как истинная форма потери устойчивости неизвестна и приходится задаваться приближенно, поэтому сам метод является

приближенным.

Потенциальная энергия изгиба без учета  $Q$  и  $N$  равна:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ}$$

Из дифференциального уравнения изгиба

$$M = EJy''; \quad y'' = \frac{M}{EJ}$$

Отсюда

$$W = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx$$

Определяем изменение энергии внешних сил – работа сил  $P$  на перемещение  $\Delta$ :

$$A = P\Delta.$$

Величину перемещения  $\Delta$  можно определить как разность между длиной  $l$  и проекцией дуги стержня на его первоначальную ось.

Проекция элемента  $dx$  на ось стержня равна  $dx \cos \alpha$

$$d\Delta = dx - dx \cos \alpha = dx(1 - \cos \alpha) =$$

$$= \frac{dx}{2} tq^2 \alpha = \frac{1}{2} (y')^2 dx;$$

$$\Delta = \int d\Delta = \frac{1}{2} \int (y')^2 dx;$$

$$\text{из уравнения } W = A; \quad \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx;$$

$$P_{кр} = \frac{EJ \int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}.$$

Эта формула является общей для всех стержней постоянного сечения при любых закреплениях концов.

Зададим для рассматриваемого примера уравнение изогнутой оси в виде:

$$y = a_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right);$$

$$\text{тогда: } y' = a_0 \frac{\pi^2}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l};$$

$$y'' = -a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l};$$

$$P_{кр} = EJ \frac{\int_0^l a_0^2 \frac{\pi^4}{16l^4} \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx}{\int_0^l a_0^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx};$$

$$\sin^2 = \frac{1}{2} - \cos 2x;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \cos 2x;$$

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l dx + \frac{1}{2} \int_0^l \cos 2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2};$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Мы получили точное решение, так как в качестве возможной кривой изгиба взяли ту кривую, по которой действительно изгибается стержень под действием силы Р.

В большинстве случаев форма кривой неизвестна. Чтобы её найти воспользуемся приближенным приемом С.П. Тимошенко.

На основании опытных данных или рассмотрения аналогичных задач задаемся подходящей формой изгиба, причем её уравнение может не удовлетворять условиям на границах и содержать один или несколько произвольных параметров.

Пример. Выбираем уравнение кривой в виде:

$$y = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x''.$$

Граничные условия на нижнем защемленном конце удовлетворяются, если положить  $a_0 = 0$ .

Чтобы удовлетворить граничные условия на верхнем, свободном, конце где  $x = l$ ,  $y \neq 0$ ,  $y'' = 0$  достаточно поло-

$$\text{жения } a_2 = -\frac{a_1}{6l^2}.$$



$$\text{Итак, } y = a_1 \left( x^2 - \frac{x^4}{6l^2} \right) \quad (*).$$

Можно убедиться, что кривая (\*) не удовлетворяет дифференциальному уравнению  $EJy'' = P(f - y)$ .

$$\text{Найдем } \left. \begin{aligned} y' &= 2a_1x - \frac{a_1 4x^3}{6l^2} \\ y'' &= 2a_1 - \frac{2a_1x^2}{l^2} \end{aligned} \right\} \text{ Подставим в формулу для}$$

$P_{кр}$ .

$$P_{кр} = EJ \frac{\int_0^l \left( 2a_1 - \frac{2a_1x^2}{l^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left( 2a_1x - \frac{4a_1x^3}{6l^2} \right)^2 dx} = \frac{42 EJ}{17 l^2} = 2,4706 \frac{EJ}{l^2}, \quad (**)$$

что приблизительно на 0,1% отличается от точного решения. Если первое приближение нас не удовлетворяет, то легко получить второе, прибавив еще один член

$$y = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6.$$

$$\text{Положим } a_0 = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$\text{при } x = l \quad y' = 2a_1x + 4a_2x^3 + 6a_3x^5$$

$$y = f \quad y'' = 2a_1 + 12a_2x^2 + 30a_3x^4$$

$$y'' = 0 \quad y''' = 24a_2x + 120a_3x^3$$

$$y''' = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} f &= a_1l^2 + a_2l^4 + a_3l^6 \\ 0 &= 2a_1 + 12a_2l^2 + 30a_3l^4 \\ 0 &= 24a_2l + 120a_3l^3 \end{aligned} \right.$$

$$a_1 = 1,362 \frac{f}{l^2}; \quad a_2 = -0,452 \frac{f}{l^4}; \quad a_3 = 0,09 \frac{f}{l^6}.$$

$$y = 1,362 \frac{f}{l^2} x^2 - 0,452 \frac{f}{l^4} x^4 + 0,09 \frac{f}{l^6} x^6.$$

Проверяем при  $x = l, \quad y = f$ .

$$y' = 2,724 \frac{f}{l^2} x - 1,816 \frac{f}{l^4} x^3 + 0,54 \frac{f}{l^6} x^5$$

$$y'' = 2,724 \frac{f}{l^2} - 5,448 \frac{f}{l^4} x^2 + 2,7 \frac{f}{l^6} x^4$$

$$(y') = f^2 \left( 7,42 \frac{x^2}{l^4} - 9,88 \frac{x^4}{l^6} + 2,94 \frac{x^6}{l^8} + 3,29 \frac{x^6}{l^5} - 1,96 \frac{x^8}{l^{10}} + 0,29 \frac{x^{10}}{l^{12}} \right)$$

$$(y'')^2 = f^2 \left( 7,42 \frac{1}{l^4} - 29,68 \frac{x^2}{l^6} + 14,7 \frac{x^4}{l^8} + 29,68 \frac{x^4}{l^8} - 29,4 \frac{x^6}{l^{10}} + 7,2 \frac{x^8}{l^{12}} \right)$$

$$P_{кр} = EJ \frac{\int (y'')^2 dx}{\int (y')^2 dx} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}$$

Недостаток способа в том, что мы при вычислении не можем указать степень точности получаемого результата. О погрешности можно судить лишь при помощи сравнения последовательных приближений.

### 3.2.2. Способ исследование полной потенциальной энергии системы, (Способ Ритца).

Так как полная потенциальная энергия системы  $V = W + (-A)$ , находящейся в равновесии имеет экстремальное значение, то можно записав выражение полной потенциальной энергии системы в деформированном состоянии, критическую силу определить из условия экстремума этой

функции. В тех случаях, когда отклоненное состояние определяется несколькими параметрами  $a_1, a_2, a_n$ , через которое будет выражаться и энергия системы, необходимые условия минимума потенциальной энергии записываются так:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0,$$

$$\text{где: } V = \frac{1}{2} EJ \int (y'')^2 dx - P_{кр} \frac{1}{2} \int (y')^2 dx; \quad (*)$$

Ритц предлагает изогнутую линию при потере устойчивости приближенно представить с помощью ряда:

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) = \sum_{j=1}^{i=n} a_j f_j(x)$$

где  $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$  - функции, подобранные следующим образом:

- 1) каждая должна удовлетворять граничным условиям;
- 2) каждая должна представлять по возможности близко предполагаемую форму изгиба;
- 3) дифференциальному уравнению изгиба эти функции могут не удовлетворять.

Определяя  $y'$  и  $y''$  и подставляя в уравнение (\*) получают  $V$  как функцию параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

$$\text{Далее: } \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \quad (**)$$

Равенство (\*\*) представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; в коэффициенты при  $a_i$  входит нагрузка  $P$ . Если  $a_i = 0$ , то решением системы (\*\*) явится определитель  $D = 0$  (\*\*\*). Это уравнение будет содержать нагрузку в степени  $n$ . Решая его мы получим  $n$  значений  $P$ . Наименьшее значение будет приближенно отвечать первой  $P_{кр}$ .

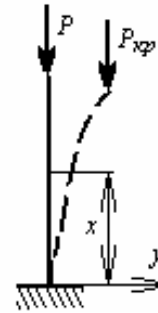


Рис.8

Пример Рис. 8. Определить  $P_{кр}$  для стержня, с зашечленным одним концом и свободным другим концом.

Представим упругую линию в первом приближении в виде отрезка квадратной параболы

$$y = a_1 x^2$$

$$\text{При } x=0, y=0, y'=0 \quad \left| \begin{array}{l} y' = a_1 2x \\ y'' = 2a_1 \end{array} \right.$$

$$x=l, y=a_1 l^2$$

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^l 4a_1^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l 4a_1^2 x^2 dx = 2EJa_1^2 l - 2Pa_1^2 \frac{l}{3};$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = EJ4a_1 l - \frac{4}{3} Pa_1 l^3 = 0;$$

$P_{кр} = \frac{3EJ}{l^2}$  (точное решение  $\frac{\pi^2}{4} = 2,4674$ , ошибка около 20%).

Во втором приближении введем новый независимый параметр  $a_2$  и примем:

$$y = a_1 x^2 + a_2 x^4, \quad \begin{array}{l} y' = 2a_1 x + 4a_2 x^3 \\ y'' = 2a_1 + 12a_2 x^2 \end{array}$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_1 + 12a_2 x^2)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l (a_1 x^2 + a_2 x^4)^2 dx =$$

$$= 2EJ \left( a_1 l^2 + 4a_1 a_2 l^3 + \frac{36}{5} a_2^2 l^5 \right) - 2Pl^3 \left( \frac{a_1^2}{3} + \frac{4a_1 a_2 l^4}{5} + \frac{4a_2^2 l^6}{7} \right);$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0.$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = 4EJa_1 + 8EJl^3 a_2 - \frac{4}{3}Pl^3 a_2 - \frac{8}{5}Pl^5 a_2 = 0.$$

$$\left(EJ - \frac{Pl^2}{3}\right)a_1 + \left(2EJl^2 - \frac{2}{5}Pl^4\right)a_2 = 0.$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = 8EJa_1 l^3 + \frac{144}{5}EJl^5 a_2 - \frac{8}{5}Pl^5 a_1 - \frac{16}{7}Pl^7 a_2 = 0.$$

$$\left(EJ - \frac{P}{5}l^2\right)a_1 + \left(\frac{18}{5}EJl^2 - \frac{2}{7}Pl^4\right)a_2 = 0.$$

Если принять  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ , то

$$D = \begin{pmatrix} 1 - \frac{P^*}{J}, 2 - \frac{2P^*}{5} \\ 1 - \frac{P^*}{5}, \frac{18}{5} - \frac{2P^*}{7} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{где } P^* = \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$= \frac{EJ}{2} \int (4a_1^2 + 48a_1a_2x^2 + 144a_2^2x^4) dx - \frac{P}{2} \int (4a_1^2x^2 + 16a_1a_2x^4 + 16a_2^2x^6) dx$$

$$P^{*2} - 45P^* + 105 = 0 \quad P_{кр} = 2,5 \frac{EJ}{l^2} \quad (\Delta = 12\%).$$

Возьмем в третьем приближении

$$= \frac{EJ}{2} \left( 4a_1^2 l + 48a_1a_2 \frac{l^3}{3} + \frac{144a_2^2 l^5}{5} \right) - \frac{P}{2} \left( \frac{4}{3}a_1^2 l^3 + \frac{16}{5}a_1a_2 l^5 + \frac{16}{7}a_2^2 l^7 \right) =$$

$$y = a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6.$$

Получим:

$$D = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}P^*, 2 - \frac{2}{5}P^*, 3 - \frac{3}{7}P^* \\ 1 - \frac{1}{5}P^*, \frac{18}{5} - \frac{2P^*}{7}, \frac{45}{7} - \frac{P^*}{3} \\ 6 - \frac{6}{7}P^*, \frac{180}{7} - \frac{4}{3}P^*, 50 - \frac{9}{3}P^* \end{pmatrix} = 0$$

$$P_{кр} = 2,48 \frac{EJ}{l^2} \quad (\Delta = 0,4\%)$$

Как видно, увеличивая число параметров  $a_i$ , мы можем сколько угодно близко подойти к точному решению задачи. Отметим, что в приведенных примерах все приближенные решения были выше точного  $\left(2,4674 \frac{EJ}{l^2}\right)$ . Это не

является случайным. Реальный стержень представляет собой систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Между тем, пользуясь методами Тимошенко, Ритца, мы вводим либо один, либо несколько варьируемых параметров, как бы ограничивая число степеней свободы системы, т.е. накладывая на нее лишние связи. Это приводит к искусственному завышению жесткости системы и большой критической силе.

#### 4. Устойчивость прямого стержня с любыми граничными условиями

Рассмотрим несколько примеров устойчивости прямого стержня, (рис. 9, 10, 11, 12).

**4.1 (рис. 9).** Этот случай рассмотрен выше, для такого стержня:

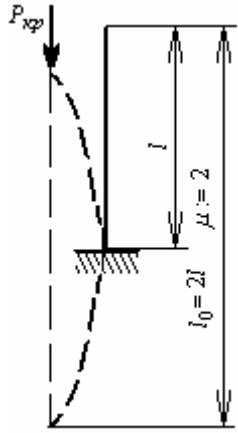


Рис.9

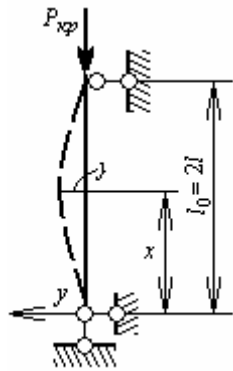


Рис.10

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$l_0$  – приведенная свободная длина

$$l_0 = \mu \cdot l = 2l$$

В геометрическом смысле  $l_0$  – длина полуволны

**4.2 (рис. 10).**

$$EJ'' = M, \quad M = -Py,$$

$$EJy'' = -Py; \quad y'' + \frac{P}{EJ}y = 0,$$

$$\frac{P}{EJ} = n^2$$

$$y'' + n^2 y = 0$$

При  $x = 0, \quad y = 0, \quad 0 = C_2$

$x = l, \quad y = 0, \quad 0 = C_1 \sin nl$

$C_1 \neq 0, \quad \sin nl = 0, \quad nl = n\pi,$

$$n = 1$$

$$nl = \pi, \quad \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P_{кр}}{EJ}; \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

**4.3 (рис. 11).**

$$M = -Py + Q(l - x),$$

$$EJy'' + Py = Q(l - x), \quad y'' + \frac{P}{EJ}y = \frac{Q}{EJ}(l - x),$$

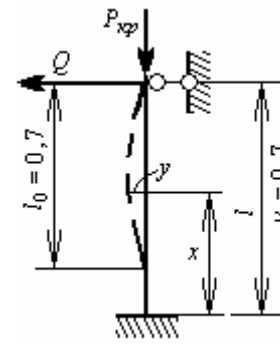


Рис.11

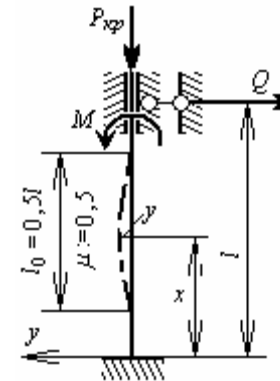


Рис.12

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + \frac{Q(l - x)}{n^2 EJ},$$

$x = 0, \quad 1) \quad y = 0, \quad 2) \quad y' = 0$

$x = l, \quad 3) \quad y = 0$

$$y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{Q}{P}$$

$$1) \quad C_2 + \frac{Ql}{P} = 0; \quad C_2 = -\frac{Ql}{P};$$

$$2) \quad C_1 n - \frac{Q}{P} = 0; \quad C_1 = \frac{Q}{Pn};$$

$$3) \quad C_1 \sin nl + C_2 \cos nl;$$

$$0 = \frac{Q}{Pn} \sin nl - \frac{Q}{P} l \cos nl =$$

$$= \frac{Q}{P} \left( \frac{\sin nl}{n} - l \cos nl \right) = 0$$

т.к.  $\frac{Q}{P} \neq 0$ , то

$$\frac{\sin nl}{n \cos nl} - \frac{l \cos nl}{\cos nl} = 0;$$

$$tqnl = nl, \quad nl = 4,493.$$

$$P_{кр} = \frac{(4,493)^2 EJ}{l^2} = \frac{20,19 EJ}{l^2}; \quad \mu = 0,7$$

4.4 (рис. 12).

$$EJy'' = -M; \quad M = Py + M - Q(l-x)$$

$$EJy'' = -Py - M + Q(l-x),$$

$$y'' + n^2 y = -\frac{M}{EJ} + \frac{Q(l-x)}{EJ};$$

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{M}{P} + \frac{Q(l-x)}{P} \quad EJn^2 = P$$

при  $x=0, y=0, y'=0$   $\left| y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{Q}{P} \right.$

$x=l, y_l=0, y'_l=0$

1)  $C_2 - \frac{M}{P} + \frac{Ql}{P} = 0,$

2)  $C_1 n - \frac{Q}{P} = 0$

3)  $C_1 \sin nl + C_2 n \cos nl - \frac{M}{P} = 0$

4)  $C_1 n \cos nl - C_2 n \sin nl - \frac{Q}{P}$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| C_1 = \frac{Q}{Ph}$$

Получена система однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 - \frac{M}{P} + \frac{Ql}{P} = 0 \\ C_2 n \cos nl - \frac{M}{P} + \frac{Q}{P_{кр}} \sin nl = 0 \\ -C_2 n \sin nl + \frac{Q}{P} (\cos nl - 1) = 0. \end{array} \right.$$

так как  $C_2 \neq 0, \frac{M}{P} \neq 0, \frac{Q}{P} \neq 0,$  то

$$D = \begin{vmatrix} 1, & -1, & l \\ n \cos nl, & -1, & \frac{\sin nl}{n} \\ -n \sin nl, & 0, & (\cos nl - 1) \end{vmatrix} = 0$$

$$D = 1 \begin{vmatrix} -1, \frac{\sin nl}{n} \\ 0, (\cos nl - 1) \end{vmatrix} - n \cos nl \begin{vmatrix} -1, l \\ 0, (\cos nl - 1) \end{vmatrix} - n \sin nl \begin{vmatrix} -1, l \\ -1, \frac{\sin nl}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos nl + 1 + n \cos^2 nl - \cos nl + \sin^2 nl - nl \cdot \sin nl = 0$$

$$-2 \cos nl + 2 - nl \cdot \sin nl = 0$$

$$nl = 2\pi$$

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; \quad \mu = 0,5$$

Рассмотренные выше четыре примера, будем в дальнейшем рассматривать как справочный материал.

## 5. Устойчивость стержня с упруго закрепленными концами

В сооружениях, кроме стержней со свободными и жесткозакрепленными концами, встречаются также стержни с упруго закрепленными концами.

Пример 1 (Рис. 13)

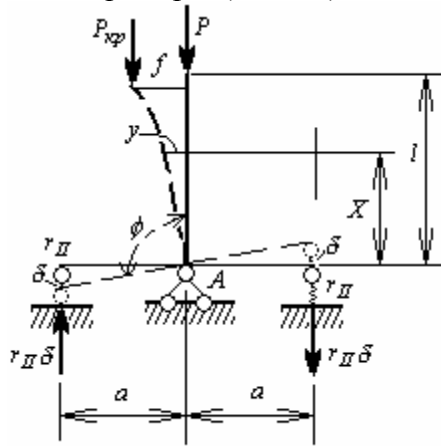


Рис.13

Упругую заделку будем характеризовать величиной поворота угла  $\varphi$  от момента  $M=1$ .

$$EJy'' = M;$$

$$M = P(f - y)$$

$$EJy'' = Pf - Py,$$

$$EJy'' + Py = Pf,$$

$$y'' + n^2y = n^2f, \text{ где}$$

$$n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y_1 = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx; \quad y_2' = A, \quad n^2 A = n^2 f,$$

$$A = y_2 = f$$

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + f;$$

граничные условия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = \varphi \quad x = l, \quad y = f$$

$$1) C_2 + f = 0; \quad C_2 = -f$$

$$2) \varphi = C_1 n; \quad C_1 = \frac{\varphi}{n};$$

$$3) C_1 \sin nl + C_2 \cos nl + f = f - \frac{\varphi}{n} \sin nl - f \cos nl = 0 \quad (*).$$

Составим уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно неподвижной опоры А:

$$\sum M_A = 0 \quad P_{кр} f - 2r_{II} \delta a = 0,$$

Откуда  $f = \frac{2r_{II} a^2 \varphi}{P}$ ; подставив в уравнение (\*), получим:

$$\frac{\varphi}{n} \sin nl - \frac{2r_{II} a^2 \varphi}{P} \cos nl = 0, \text{ далее}$$

$$tqnl = \frac{2r_{II} a^2 n}{P},$$

но так как  $P = n^2 EJ$ ; окончательно получим:

$$tqnl = \frac{2r_{II} a^2}{nEJ};$$

зная  $r_{II}$ , подбором получим значение  $F_{кр}$ .

При  $r_{II} = \infty$  (что соответствует жесткому опорному стержню)

получаем  $tqnl = \infty$  или  $nl = \frac{\pi}{2} (i = 1, 2, 9, \dots)$

$$P_{кр}^{\min} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Пример 2 (рис. 14)

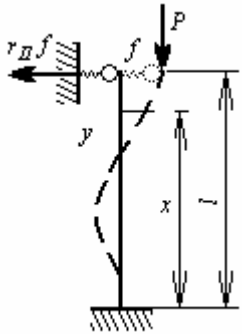


Рис.14

Стержень упруго оперт сверху.

Изгибающий момент:

$$M_x = P(f - y) - r_{II} f(l - x),$$

где  $r_{II}$  - жесткость пружины, т.е. усилие в пружине при удлинении, равном 1.

$$EJy'' = Pf - Py - r_{II} fl + r_{II} fx$$

$$EJy'' + Py = Pf - r_{II} f(l - x);$$

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = \frac{P}{EJ} f - \frac{r_{II} f}{EJ} (l - x), \quad n^2 = \frac{P}{EJ};$$

$$y_1 = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx;$$

$$y_2 = A, \quad y'' = 0, \quad 0 + n^2 y = \frac{P}{EJ} f - \frac{r_{II} f}{EJ} (l - x)$$

$$A = f - \frac{r_{II} f}{P} (l - x)$$

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + f - \frac{r_{II} f}{P} (l - x);$$

граничные условия:  $x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad x = l, \quad y = f.$

Первое условие 
$$C_2 + f - \frac{r_{II} fl}{P} = 0.$$

Второе условие

$$y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx + \frac{r_{II} f}{F} = 0 \quad C_1 n + \frac{r_{II} f}{P} = 0.$$

Третье условие

$$C_1 n \sin nl - C_2 \cos nl + f = f; \quad C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = 0.$$

Получаем три однородных уравнения:

$$\begin{cases} C_2 + f \left(1 - \frac{r_{II} l}{P}\right) = 0 \\ C_1 n + f \frac{r_{II}}{P} = 0 \\ C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = 0 \end{cases}$$

Так как  $C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0$  и  $f \neq 0$ , то

$$D = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \left(1 - \frac{r_{II} l}{P}\right) \\ n, & 0, & \frac{r_{II}}{P} \\ \sin nl & , \cos nl, & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Характеристическое уравнение устойчивости

$$D = 0 \begin{vmatrix} 0, & \frac{r_{II}}{P} - n \\ n \cos nl, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & \left(1 - \frac{r_{II}l}{P}\right) + \sin nl \\ \cos nl, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & \left(1 - \frac{r_{II}l}{P}\right) \\ 0, & \frac{r_{II}}{P} \end{vmatrix} =$$

$$= n \cos nl \left(1 - \frac{r_{II}l}{P}\right) + \sin nl \frac{r_{II}}{P} = 0,$$

$$n \left(1 - \frac{r_{II}l}{P}\right) + tqnl \frac{r_{II}}{P} = 0$$

$$tqnl = \frac{nn^2 EJ}{r_{II}} \left(1 - \frac{r_{II}l}{n^2 EJ}\right) = -\frac{n^3 EJ}{r_{II}} + \frac{n^3 EJ r_{II} l}{r_{II} n^2 EJ} =$$

$$= nl - \frac{n^3 EJ}{r_{II}} = nl - \frac{(nl)^3 EJ}{l^3 r_{II}};$$

Частные решения:

а)  $r_{II} = 0$  (стержень заделан нижним концом, верхний конец свободен)

$$tqnl = \infty, \quad \text{ему соответствует} \quad nl = \frac{\pi}{2} \quad \text{и}$$

$$P_{кр} = n^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2};$$

б)  $r_{II} = \infty$ , (стержень заделан нижним концом и шарнирно оперт на верхнем)

$tqnl = nl$ , ранее получен ответ  $nl = 4,493$ .

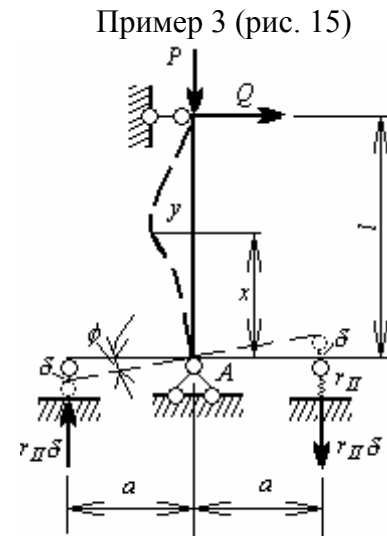


Рис.15

$$M_x = -Py - Q(l - x),$$

$$EJy'' + Py = -Q(l - x),$$

$$y'' + n^2 y = -\frac{Q}{EJ}(l - x),$$

$$n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y_1 = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx$$

$$y_2 = A, \quad y_2'' = 0$$

$$0 + n^2 A = -\frac{Q}{EJ}(l - x);$$

$$y_2 = -\frac{Q}{P}(l - x)$$

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{Q}{P}(l - x); \text{ Откуда}$$

$$\text{Граничные условия: } x = 0, \quad y = 0, \quad y' = \varphi$$

$$x = l, \quad y = 0$$

$$y' = \varphi = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx + \frac{Q}{P}$$

$$\text{Из первого условия: } C_2 - \frac{Q}{P}l = 0$$

$$\text{Из второго условия: } C_1 n + \frac{Q}{P} = \varphi \quad (*)$$

$$\text{Из третьего условия: } C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = 0 \quad (**)$$



В наших трех уравнениях четыре неизвестных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi$ ,  $Q$ . Четвертым будет уравнение равновесия в виде  $\sum M_A = 0$ :

$$Ql + r_{II} \delta 2a = 0, \quad \delta a = \varphi, \quad Ql + r_{II} \frac{\varphi}{a} 2a = 0$$

Откуда  $\varphi = -\frac{Ql}{2r_{II}}$ ; подставив в уравнение (\*),

$$\text{получим } -\frac{Ql}{2r_{II}} = c_1 n + \frac{Q}{P}, \quad C_1 n + \frac{Q}{P} \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) = 0.$$

Окончательно имеем три однородных уравнения:

$$\begin{cases} C_2 - \frac{Q}{P} l = 0 \\ C_1 n + \frac{Q}{P} \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) = 0 \\ C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = 0. \end{cases}$$

Так как  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$ ,  $\frac{Q}{P} \neq 0$ , то решение системы будет:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -l \\ n & 0 & \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) \\ \sin nl & \cos nl & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) \\ \cos nl & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-n \begin{vmatrix} 1 & -l \\ \cos nl & 0 \end{vmatrix} + \sin nl \begin{vmatrix} 1 & -l \\ 0 & \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\cos nl \cdot nl + \sin nl \left(1 + \frac{Pl}{2r_{II}}\right) = 0$$

$$tqnl = \frac{nl}{\left(1 + \frac{n^2 EJ}{2r_{II}}\right)} = \frac{nl}{1 + \frac{(nl)^2 EJ}{2r_{II} l}}$$

Частный случай: В случае жесткой заделки ( $\eta_{II} = \infty$ )

$$tqnl = nl; \quad nl = 4,493; \quad P_{кр}^{\min} = \frac{20,1904}{l^2}.$$

При  $\eta_{II} = 0$  случай шарнирного опирания

$$tqnl = 0; \quad nl = i\pi (i = 1, 2, 3 \dots); \quad P_{кр}^{\min} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

## 6. Устойчивость стержня в упругой среде

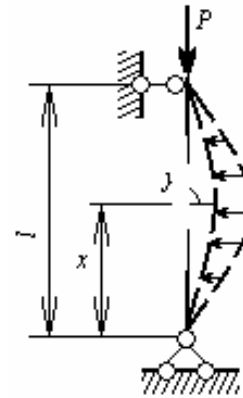


Рис.16

Для определения критической силы для стержня, находящегося в упругой среде (рис. 16), реакции которой пропорциональны прогибу, применим энергетический метод.

Зададим уравнение изгиба синусоидальной кривой:

$$y = a \sin \frac{m\pi x}{l},$$

где  $m$  – число полуволин изогнутой оси стержня.

Энергия деформации складывается из двух видов энергии:

а) энергии изгиба стержня

$$W = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx \quad (\text{см. выше})$$

$$y^x = a \sin \frac{\pi mx}{l}; \quad y' = \frac{am\pi}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}; \quad y'' = -a \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m\pi x}{l};$$

$$(y'')^2 = a^2 \frac{\pi^4 m^4}{l^4} \sin^2 \frac{m\pi x}{l};$$

$$w_1 = \frac{EJ}{2} \int_0^l a^2 \frac{\pi^4 m^4}{l^4} \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{a^2 \pi^4 m^4 EJ}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{a^2 \pi^4 m^4 EJ}{l^4} \frac{l}{2} = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} a^2 m^4;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\int \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{1}{2} \cos 2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} - 0 = \frac{l}{2}.$$

б) энергии деформации основания:

$$w_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx,$$

где  $\beta$  - коэффициент постели (реакция среды при единичном перемещении);

$\beta y$  - статически приложенная сила, ( $y$  - перемещение);

$\frac{\beta y}{2} dx$  - элементарная сила.

$$w_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{\beta}{2} \int_0^l a^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{\beta}{2} a^2 \frac{l}{2} = a^2 \frac{\beta l}{4}.$$

Работа груза  $P$  на опускание верхнего конца равна

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx \quad (\text{см. энергетический метод расчета})$$

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{am\pi}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^l \frac{a^2 m^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{Pa^2 m^2 \pi^2}{2l^2} \frac{l}{2} = \frac{\pi^2 P}{4l} a^2 m^2.$$

Из условия  $A = w_1 + w_2$  найдем:

$$\left[ \frac{\pi^4 EJ}{l^2} a^2 m^4 + \frac{\beta l}{4} a^2 \right] = \frac{\pi^2 P}{4l} a^2 m^2$$

$$\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} m^4 + \frac{\beta l}{4} = \frac{\pi^2 P}{4l} m^2;$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left( m^2 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 m^2 EJ} \right).$$

Число полуволин « $m$ » изогнутой оси стержня зависит от коэффициента постели (упругости среды)  $\beta$ .

При малых значениях  $\beta$  необходимо принимать  $m=1$ .

Граничные значения  $\beta$ , при которых изгиб будет происходить по двум полуволам, найдется из условия, что  $F_{кр}$ , определяемое выше полученной формулой, будет иметь одно и то же значение как при  $m=1$ , так и при  $m=2$ .

В этом случае будет соблюдаться равенство

$$1 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EJ} = 4 + \frac{\beta l^4}{4\pi^4 EJ}; \quad 4\pi^4 EJ + 4\beta l^4 = 16\pi^4 EJ + \beta l^4,$$

$$3\beta l^4 = 12\pi^4 EJ; \quad \beta = \frac{4\pi^4 EJ}{l^4}.$$

Следовательно, если  $\beta < \frac{4\pi^4 EJ}{l^4}$ , то  $m=1$ ;

если  $\beta > \frac{4\pi^4 EJ}{l^4}$ , то  $m > 1$ .

В общем случае для назначения числа полуволн «m» необходимо учитывать, что изменение числа полуволн на единицу не меняет значение критической силы.

В этом случае имеет место равенство

$$m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2 \pi^4 EJ} = (m+1)^2 + \frac{\beta l^4}{(m+1)^2 \pi^4 EJ};$$

$$\frac{\beta l^4}{\pi^4 EJ} = m^2(m+1)^2.$$

Таким образом, при заданных размерах стержня и коэффициента постели  $\beta$  величина «m» находится из последнего уравнения, после чего находится критическая сила.

В общем случае получается дробное значение «m». При определении критической силы следует принимать «m» равным меньшему ближайшему целому числу, например, получено  $m=3,86$ , нужно принимать  $m=3$ .

## 7. Устойчивость вертикального стержня под действием собственного веса

Задачу решим энергетическим методом исходя из  $A = W$

$$W = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx$$

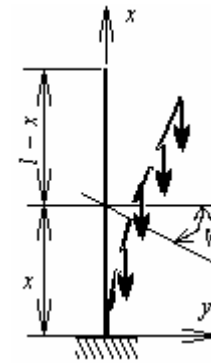


Рис. 17

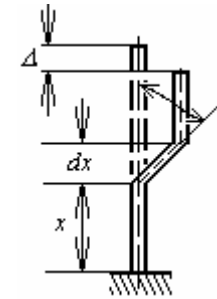


Рис.18

Из рисунка 18 видно, что при наклоне элемента  $dx$  на  $y'_{(x)}$  вся вышележащая нагрузка  $(l-x)q$  произведет работу

на перемещение  $\Delta = \frac{1}{2}(y')^2 dx$ , следовательно

$$dA = \frac{1}{2} q(l-x)(y'_x)^2 dx,$$

$$A = \frac{q}{2} \int (l-x)(y')^2 dx.$$

Приравняв A и W, получим:

$$(ql)_{кр} = \frac{\int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (l-x)(y')^2 dx} l EJ.$$

Задаваясь кривой изгиба, получим приближенное значение критической нагрузки

Примем:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n.$$

Ограничимся пятью числами ряда:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Из условия  $x = 0$ , 1)  $y = 0$ , 2)  $y' = 0$ , 3)  $y''' = Q = 0$ .

$$1) a_0 = 0,$$

$$2) a_1 = 0,$$

$$3) a_3 = 0.$$

Уравнение принимает вид:

$$y = a_2x^2 + a_4x^4,$$

$$y' = 2a_2x + 4a_4x^3,$$

$$y'' = 2a_2 + 12a_4x^2.$$

$$\int_0^l (y'')^2 dx = \int_0^l (2a_2 + 12a_4x^2)^2 dx = 4a_2^2l + 48a_2a_4 \frac{l^3}{3} + 144a_4^2 \frac{l^5}{5}.$$

Введем обозначение  $\frac{a_4}{a_2}l^2 = Z$ ,

$$\text{Получим: } \int_0^l (y'')^2 dx = 4a_2^2l \left( 1 + 4Z + \frac{36}{5}Z^2 \right)$$

$$\int_0^l (y')^2 (l-x) dx =$$

$$= \int_0^l (l-x)(2a_2x + 4a_4x^3)^2 dx = 4a_2^2l^4 \left( \frac{1}{12} + \frac{2}{15}Z + Z^2 \right)$$

$$(ql)_{кр} = \frac{EJ}{l^2} \frac{1 + 4Z + \frac{36}{5}Z^2}{\frac{1}{12} + \frac{2}{15}Z + \frac{1}{14}Z^2}, \quad (*)$$

$$\frac{d}{dZ} (ql)_{кр} = \frac{118}{175}Z^2 + \frac{37}{35}Z + \frac{1}{5} = 0$$

$$Z_1 = -0,22, \quad Z_2 = -1,35.$$

Подставим в формулу (\*), получим значение критического веса

$$(ql)_{кр} = \frac{8,15EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,10l)^2}.$$

Точное решение дает

$$(ql)_{кр} = \frac{7,83EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,122l)^2},$$

расхождение  $n_e \approx 2\%$

## 8. Устойчивость стержня переменного сечения

Во многих конструкциях применяются стержни, поперечное сечение которых меняется по длине по тому или иному закону. Рассмотрим стержень, жесткость которого меняется по длине уступами (рис. 19).

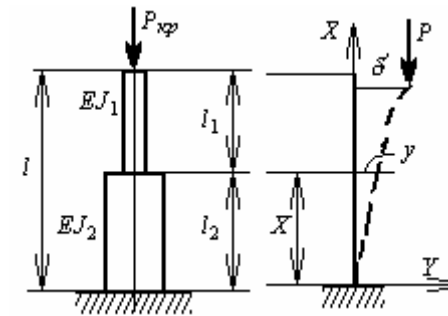


Рис. 19

I-й участок

$$EJ_1 y_1'' = M,$$

$$M = P(\delta - y_1),$$

$$EJ_1 y_1'' + Py_1 = \delta P,$$

$$1) \quad y_1'' + n_1^2 y_1 = n_1^2 \delta, \quad \frac{P}{EJ_1} = n_1^2$$

II-й участок

$$EJ_2 y_2'' = M, \quad M = P(\delta - y_2)$$

$$2) \quad y_2'' + n_2^2 y_2 = n_2^2 \delta, \quad \frac{P}{EJ_2} = n_2^2$$

Решение:

$$y_1 = A_1 \sin n_1 x + A_2 \cos n_1 x + \delta_1$$

$$y_2 = B_1 \sin n_2 x + B_2 \cos n_2 x + \delta_2$$

Из граничных условий:

$$1) \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_2' = 0$$

$$y_1' = A_1 n_1 \cos n_1 x - A_2 n_1 \sin n_1 x$$

$$2) \quad x = l, \quad y_1 = \delta_1$$

$$y_2' = B_1 n_2 \cos n_2 x - B_2 n_2 \sin n_2 x$$

$$3) \quad x = l_2, \quad y_1' = y_2', \quad y_2 = y_1, \quad y_2 = \delta_2$$

$$\text{и } y_1'' = \frac{EJ_2}{EJ_1} \cdot y_2'' = -\frac{n_1^2}{n_2^2} y_2'',$$

$$1) \quad 0 = B_2 + \delta_2, \quad B_1 n_2 = 0, \quad B_1 = 0;$$

$$2) \quad \delta_1 = A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l + \delta_1;$$

$$3) \quad A_1 n_1 \cos n_1 l_2 - A_2 n_1 \sin n_1 l_2 = -B_2 n_2 \sin n_2 l_2, \\ A_1 \sin n_1 l_2 + A_2 \cos n_1 l_2 + \delta = B_2 \cos n_2 l_2 + \delta$$

Получаем систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l = 0 \\ A_1 n_1 \cos n_1 l_2 - A_2 n_1 \sin n_1 l_2 + B_2 n_2 \sin n_2 l_2 = 0 \\ A_1 \sin n_1 l_2 + A_2 \cos n_1 l_2 - B_2 \cos n_2 l_2 = 0. \end{cases}$$

Так как  $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, B_2 \neq 0$  - то

$$D = \begin{vmatrix} \sin n_1 l_1 & \cos n_1 l_2 & 0 \\ \cos n_1 l_2 & -\sin n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 \\ \sin n_1 l_2 & \cos n_1 l_2 & -\cos n_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \sin n_1 l \begin{vmatrix} -\sin n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 \\ \cos n_1 l_2 & -\cos n_2 l_2 \end{vmatrix} - \cos n_1 l_2 \begin{vmatrix} \cos n_1 l & 0 \\ \cos n_1 l_2 & -\cos n_2 l_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \sin n_1 l_2 \begin{vmatrix} -\cos n_1 l & 0 \\ -\sin n_1 l_2 & \frac{n_2 \sin n_2 l_2}{n_1} \end{vmatrix} = \sin n_1 l \cdot \sin n_1 l_2 \cdot \cos n_2 l_2 -$$

$$- \sin n_1 l_2 \cdot \cos n_1 l_2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 + \sin n_1 l_2 \cdot \cos n_1 l \cdot \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 +$$

$$\cos n_1 l_2 \cdot \cos n_1 l \cdot \cos n_2 l_2 = \operatorname{tg} n_1 l \cdot \operatorname{tg} n_1 l_2 -$$

$$- \operatorname{tg} n_1 l \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 \frac{n_2}{n_1} + \operatorname{tg} n_1 l_2 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 \frac{n_2}{n_1} = 0$$

$$\operatorname{tg} n_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 - \frac{n_1}{n_2} = 0$$

$$\operatorname{tg} n_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2}$$

Это уравнение решается при заданных отношениях  $\frac{EJ_1}{EJ_2}$  и  $\frac{l_2}{l_1}$  и является

одновременно решением и для стержня, показанного на рисунке 20.

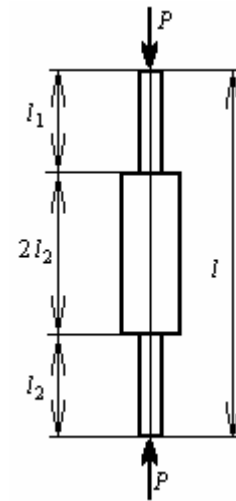


Рис. 20

В случае действия двух сил:  $F_1$  сверху и  $F_2$  на уровне уступа, имеем:

$$tq n_1 l_1 \cdot tq n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{P_1 + P_2}{P_1} \quad (*)$$

$$n_1^2 = \frac{F_1}{EJ_1};$$

$$n_2^2 = \frac{P_1 + P_2}{P_1}.$$

Пример: Определим критическое значение силы для стержня, изображенного на рис. 21.

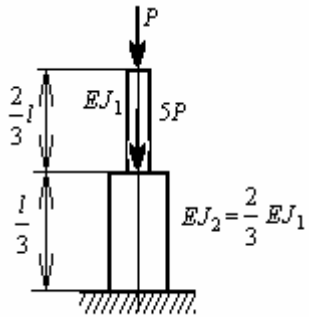


Рис. 21

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = n;$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{P + 5P}{EJ_2}} = \sqrt{\frac{6P}{1,5EJ_2}} = 2n,$$

$$l_1 n_1 = \frac{2}{3} l \cdot n = z,$$

$$l_2 n_2 = \frac{1}{3} l 2n = \frac{2l}{3} n = z$$

Уравнение устойчивости (\*) принимает вид:

$$tq^2 z = \frac{1}{2} \frac{P + 5P}{P} = 3;$$

$$tqz = \sqrt{3}; \quad z = \frac{\pi}{3}$$

Следовательно:

$$\frac{2}{3} l \sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = \frac{\pi}{3};$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_1}{4l^2}.$$

## 9. Устойчивость составных стержней

В составных стержнях сдвиги, возникающие под действием сжимающей силы, воспринимаются почти полностью связевыми устройствами, служащими для соединения отдельных ветвей, из которых образован стержень.

Поэтому критическая сила для таких стержней зависит не только от поперечного сечения основных ветвей, но и от сечения элементов соединительной решетки.

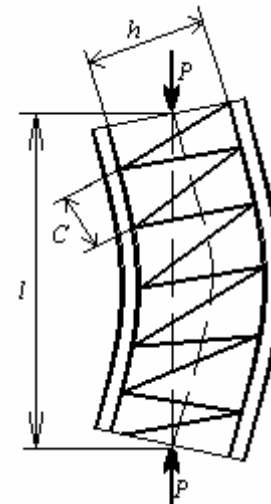


Рис. 22

Влияние сдвигов на критическую силу в составных стержнях более значительно, чем в сплошных и поэтому ими пренебрегать нельзя.

Взаимное расположение решетки и планок в металлических конструкциях влияет на величину усилий, возникающих в них и на устойчивость всего стержня.

Рассмотрим продольный изгиб стержня, состоящего из двух поясов и решетки (рис. 22).

Концы стержня считаются шарнирно опертыми.

Особенность работы такого стержня в том, что в составном стержне значительную роль играет взаимный сдвиг поясов, обусловленный деформацией решетки.

Для упрощения расчета примем, что ось стержня изгибается по синусоиде:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (*)$$

Более точное решение потребовало бы представить «у» в виде суммы нескольких синусоид, например:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (**)$$

При вычислении возможной работы внутренних сил необходимо иметь в виду, что в стержне с прямой осью при действии центральной продольной силы решетка не работает, она вступает в работу после того, как ось примет криволинейную форму.

При возможном перемещении бесконечно малое приращение (вариация) прогиба «а» будет «да», изменится кривизна оси, однако длина кривой линии не изменится, поэтому работа первоначальных усилий, имевшихся в поясе до выпучивания, равна нулю; работу совершают только те поясные усилия, которые возникли благодаря искривлению стержня.

Эти усилия равны частному от деления момента внешних сил  $P_{кр}y$  на плечо «h»:

$$N_n = \pm \frac{P_{кр}y}{h} = \pm P_{кр} \frac{a}{h} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

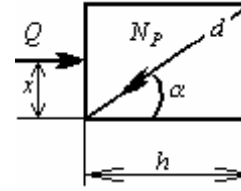
Целесообразно считать, что усилие на протяжении каждой панели пояса остается постоянным, а за «х» принимаем абсциссу моментной точки, рассматриваемого элемента пояса.

Решетка работает на поперечную силу, которая равна:

$$Q = \frac{dM}{dx} = N_n h = P_{кр} y = (P_{кр} a \sin \frac{\pi x}{l})' = P_{кр} a \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l};$$

Усилия в раскосах:

$$N_p = \frac{Q}{\cos \alpha} = +Q \frac{d}{h} = P_{кр} a \frac{d}{h} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$



где d – длина раскоса, за x можно принять абсциссу середины рассматриваемой панели.

Усилия в стойках:

$$N_c = P_{кр} a \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Найдем уравнение возможных работ внутренних сил:

а) в поясах:

$$\begin{aligned} \sum_n N \frac{d\Delta}{da} \delta a &= \sum_n N \frac{d}{da} \left( \frac{N l_i}{E F_i} \right) \delta a = \sum_n N_n \frac{d}{da} \left( \frac{N_n l_i}{E F_i} \right) \delta a = \\ &= \sum_n P_{кр} \frac{a}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{d}{da} \left( P_{кр} \frac{a}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{E F_i} \right) \delta a = \\ &= a \sum_n \frac{P_{кр}}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{P_{кр}}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{E F_i} \delta a = a \sum_n \left( \frac{P_{кр}}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} \delta a = \text{б)} \\ &= a \sum_n \left( \frac{P_{кр}}{h} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} \delta a; \end{aligned}$$

б) в раскосах:

$$\begin{aligned} \sum_p N \frac{d\Delta}{da} \delta a &= \sum_p N \frac{d}{da} \left( \frac{N l_i}{E F_i} \right) \delta a = \sum_p N_p \frac{d}{da} \left( \frac{N_p l_i}{E F_i} \right) \delta a = \\ &= \sum_p P_{кр} a \frac{d}{h} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \frac{d}{da} \left( P_{кр} a \frac{d}{h} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right) \delta a \frac{l_i}{E F_i} = \\ &= a \sum_p \left( P_{кр} \frac{\pi}{l} \frac{d}{h} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} \delta a; \end{aligned}$$

в) в стойках:

$$\begin{aligned} \sum_C N \frac{d\Delta}{da} \delta a &= \sum_C N \frac{d}{da} \left( \frac{N l_i}{E F_i} \right) \delta a = \\ &= \sum_C P_{кр} a \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \frac{d}{da} \left( P_{кр} a \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right) \frac{l_i}{E F_i} \delta a = \\ &= a \sum_C \left( P_{кр} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} \delta a. \end{aligned}$$

Уравнение возможных работ внешних сил:

$$A = P_{кр} \frac{d\Delta}{da} \delta a \quad \Delta = \int \frac{1}{2} (y')^2 dx = \int \frac{1}{2} \frac{a^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 a^2 l}{2 l^2 2}$$

$$A = \frac{P_{кр} \pi^2 a}{2l}$$

Уравнение возможных работ:

$$\begin{aligned} a \sum_n \left( \frac{P_{кр}}{n} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} + a \sum_P \left( P_{кр} \frac{\pi}{l} \frac{d}{h} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} + \\ + a \sum_C \left( P_{кр} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 \frac{l_i}{E F_i} - P_{кр} \frac{\pi^2 a}{2l} = 0 \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} a \frac{P_{кр}^2}{h^2} \frac{1}{E} \sum_n \sin^2 \frac{2\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} + a P_{кр}^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{d^2}{h^2} \frac{1}{E} \sum_P \cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} + \\ + a P_{кр}^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{E} \sum_C \cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} - P_{кр} \frac{\pi^2 a}{2l} = 0; \end{aligned}$$

Так как  $P_{кр} a \neq 0$ , то:

$$\begin{aligned} \frac{P_{кр}}{n^2 E} \sum_n \sin^2 \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} + P_{кр} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{d^2}{h^2} \frac{1}{E} \sum_P \cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} + \\ + P_{кр} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{E} \sum_C \cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{l_i}{F_i} - \frac{\pi^2}{2l} = 0; \end{aligned}$$

$$P_{кр} = \frac{\frac{\pi}{2l} E}{\frac{c}{h^2} \sum_n \frac{1}{F_i} \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi^2 d^3}{l^2 h^2} \sum_P \cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{1}{F_i} + \frac{\pi^2 h}{l^2} \sum_C \frac{1}{F_i} \cos^2 \frac{\pi x}{l}}$$

В этом уравнении  $\sum_n l_i = C$ ;  $\sum_P l_i = d$ ;  $\sum_C l_i = h$ .

Какое влияние имеет податливость решетки?

По мере уменьшения  $F_i$  под знаками  $\sum_C$  и  $\sum_P$  эти две суммы стремятся к бесконечности, а величина  $P_{кр}$  к нулю; наоборот, увеличение этих площадей влечет за собой увеличение критической силы.

Если положим  $F_i = \infty$ , тогда:

$$P_{кр} = \frac{\frac{\pi}{2l} E}{\frac{C}{h^2} \sum_n \frac{1}{F_i} \sin^2 \frac{\pi x}{l}}$$

Для частного случая, когда оба пояса по всей своей длине имеют постоянное сечение, это выражение совпадает с выражением критической силы для сплошного стержня, момент инерции которого равен сумме моментов в обоих поясах



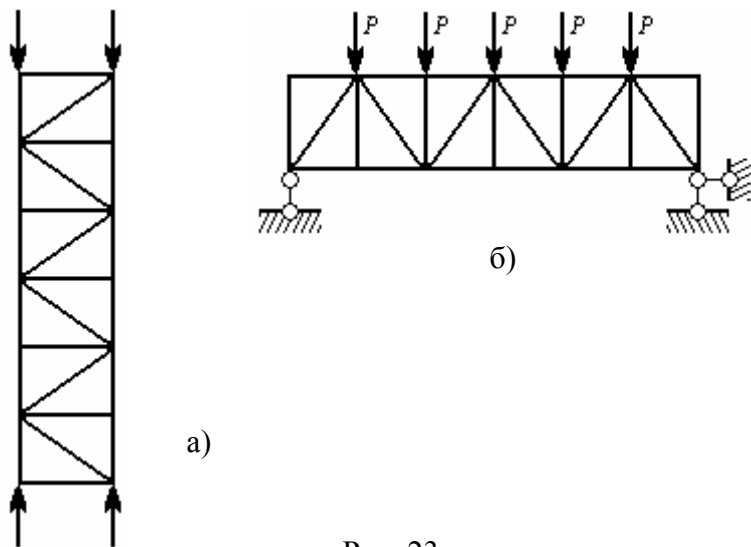


Рис. 23

относительно нейтральной оси. На этом основании можно заменить расчет составного стержня расчетом некоторого эквивалентного ему, в смысле устойчивости, сплошного стержня.

Если момент инерции последнего будет  $J_0$ , то для критической силы получим выражение:

$$P_{кр} = \frac{\pi EJ_0}{l^2}.$$

Вся трудность задачи состоит в нахождении величины  $J_0$ , которую можно назвать «приведенным моментом инерции» составного стержня.

Так как величина критической силы зависит от работы внутренних сил при заданной форме упругой линии, а работа внутренних сил равна работе внешних сил, то очевидно, что для определения  $J_0$  и  $P_{кр}$  можно использовать простой экспериментальный и теоретический прием (рис. 23).

Опытным или теоретическим путем определяем перемещение всех узлов. При теоретическом расчете составной стержень необходимо рассматривать как ферму. После этого подсчитаем работу внешних или внутренних сил, пусть эта работа будет  $W_0$ .

Затем подсчитаем работу тех же внешних сил для сплошной балки того же пролета, имеющей произвольно заданный момент инерции  $J$  поперечного сечения, пусть эта работа будет  $W$ .

Очевидно, данный составной стержень эквивалентен в смысле жесткости балке сплошного сечения с моментом инерции  $J_0$ :

$$J_0 = J \frac{W}{W_0}.$$

## 10. Практические примеры расчета на устойчивость

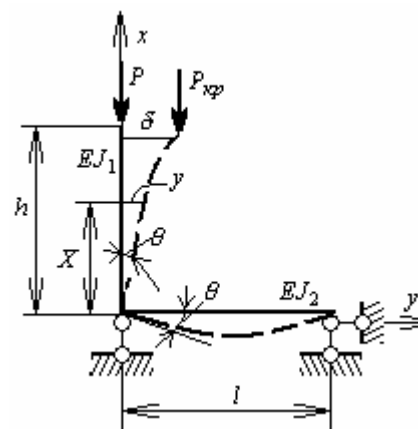


Рис. 24

Пример 1 (рис. 24). Найти статическим способом величину критической силы или определяющее уравнение.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$EJy'' = M$$

$$M = P_{кр}(\delta - y)$$

при

$$EJy'' + P_{кр}y = F_{кр}\delta \quad (*)$$

$$y'' + n^2y = n^2\delta, \text{ где}$$

$$n^2 = \frac{P_{кр}}{EJ}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (\*) складывается из общего решения однородного уравнения (без правой части уравнения (\*)) и частного решения неоднородного уравнения:

$$y = y_1 + y_2,$$

где общее решение

$$y_1 = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx.$$

Согласно принципу независимости действия сил отклонение стержня при потере устойчивости пропорционально действующей нагрузке  $y_{\text{частное}} = y_2 \approx P$ , следовательно, в дифференциальном уравнении (\*)  $y'' = 0$ , тогда  $n^2 y_2 = n^2 \delta$ ,  $y_2 = n^2$  и полное решение будет иметь вид:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + \delta.$$

Граничные условия для определения произвольных постоянных будут:

при  $x = 0$  1)  $y = 0$ , 2)  $y' = 0$ , 3)  $x = h$ ;  $y = -\delta$

$$1) 0 = C_2 + \delta; \quad C_2 = -\delta$$

$$2) y' = \Theta = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx$$

$$\Theta = C_1 n; \quad C_1 = \frac{\Theta}{n}$$

$$3) \delta = C_1 \sin nh + C_2 \cos nh + \delta$$

$$\frac{\Theta}{n} \sin nh - \delta \cos nh; \quad (**)$$

Чтобы в уравнении (\*\*) избавиться от неизвестных величин  $\Theta$  и  $\delta$ , рассмотрим деформацию балки, находящейся в основании (рис. 25). Её деформация происходит в результа-

те действия сосредоточенного момента, равного  $P\delta$  (рис. 25,а).

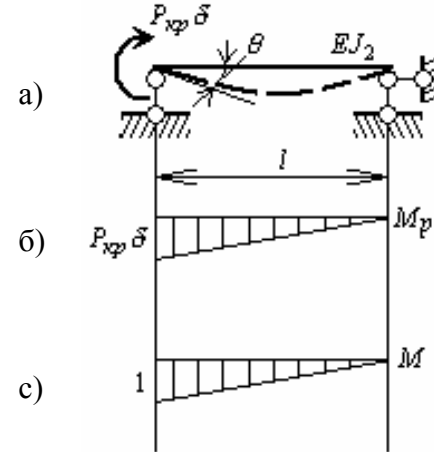


Рис.25

Для определения угла поворота  $\Theta$  необходимо вычислить интеграл Мора:

$$\theta = \sum \int \frac{M_F \bar{M} dx}{EJ_2} = \frac{P_{кр} \delta l}{3EJ_2 n^3} \cdot 2 = \frac{P_{кр} \delta l}{3EJ_2}.$$

Подставив полученное значение  $\Theta$  в уравнение (\*\*), получим:

$$\frac{P_{кр} \delta l}{3EJ_2 n \cos nh} - \frac{\delta \cos nh}{\cos nh} = 0;$$

$$\frac{3J_2 h t q n h}{l} = P_{кр}.$$

Пример 2 (рис. 26). Найти величину критической силы.

Энергетический способ

$$A = W; \quad A = P \Delta p$$

$$\Delta p = 2l - 2 \cos \alpha = 2l(1 - \cos \alpha) = \frac{2ltq^2 \alpha}{2} = l \alpha^2;$$

$$A = Pl \alpha^2$$

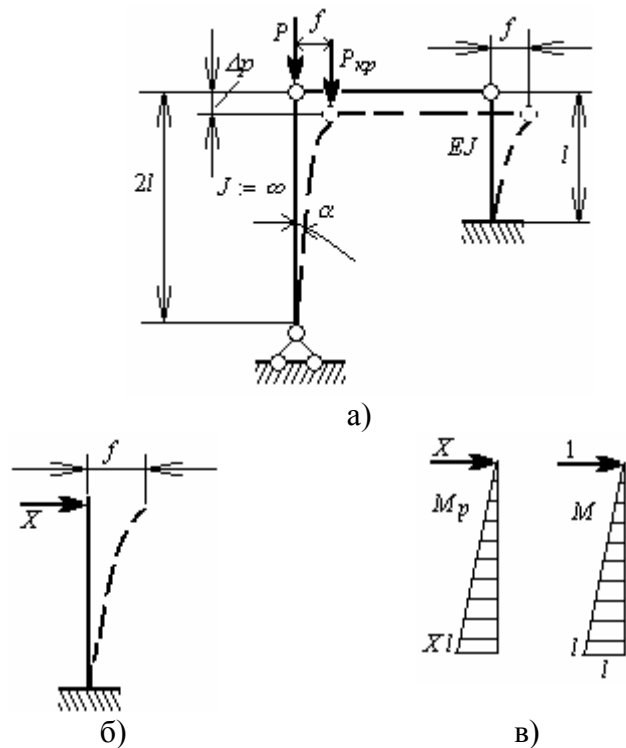


Рис. 26

Работу внутренних сил можно получить:  
 а) как результат действия силы  $X$  на конец правой (упругой) стойки  $W = \frac{1}{2} Xf$ . Так как сила  $X$  выросла на отклонении  $f$  от нуля до полного значения, то в произведении работы ставится множитель  $\frac{1}{2}$ .

$$f = \sum \frac{M_F \bar{M} dx}{EJ} = \frac{\bar{x}l \cdot l}{2} \frac{1}{3} \frac{l}{EJ} = \frac{xl^3}{3EJ};$$

$$\text{откуда } X = \frac{f3EJ}{l^3}; \quad W = \frac{1}{2} \frac{f3EJ}{l^3} f = \frac{1}{2} \frac{f^2 3EJ}{l^3}.$$

Из (рис.25)  $f = 2l \cdot tq\alpha \approx 2l\alpha$ ;

$$Pl\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{3EJ}{l^3} 4l^2\alpha^2; \quad P_{кр} = \frac{6EJ}{l^2};$$

б) можно определить по формуле:

$$W = \frac{EJ}{2} \int (y_X'')^2 dx,$$

где  $y_X$  - уравнение, описывающее форму изгиба при потере устойчивости правой стойки.

Зададим форму потери устойчивости в виде:

$$y_X = f(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}),$$

оно отвечает граничным условиям:

$$\text{при } \begin{matrix} x=0, & y=0 \\ x=l, & y=f \end{matrix}$$

$$y' = f \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}; \quad y'' = f \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l};$$

$$W = \frac{EJ}{2} f^2 \frac{\pi^4}{16l^4} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{EJ}{2} f^2 \frac{\pi^4}{16l^4} \cdot \frac{l}{2}.$$

$$\text{Окончательно: } W = \frac{EJ}{2} 4l^2\alpha^2 \frac{\pi^4}{32l^3};$$

$$Pl\alpha^2 = \frac{EJ\alpha^2 \pi^4}{16l}; \quad F_{кр} = \frac{EJ97,22}{16l^2} = \frac{6,08EJ}{l^2},$$

что на 1,32% отличается от точного результата.

Пример 3 (рис. 27, а,б,в)

Задачу решим энергетическим способом:

$$W = A; \quad A = P\Delta p;$$

$$\Delta p = h - h \cos \alpha = h(1 - \cos \alpha) = \frac{htq^2 \alpha}{2} = \frac{h\alpha^2}{2};$$

$$A = P_{кр} \frac{h\alpha^2}{2}.$$

Работу внутренних сил определяем как работу сосредоточенного момента (рис. 26.б), равного  $P_{кр}f$ , на перемещение (угла поворота)  $\alpha$ .

$$W = \frac{1}{2} P_{кр} f \alpha;$$

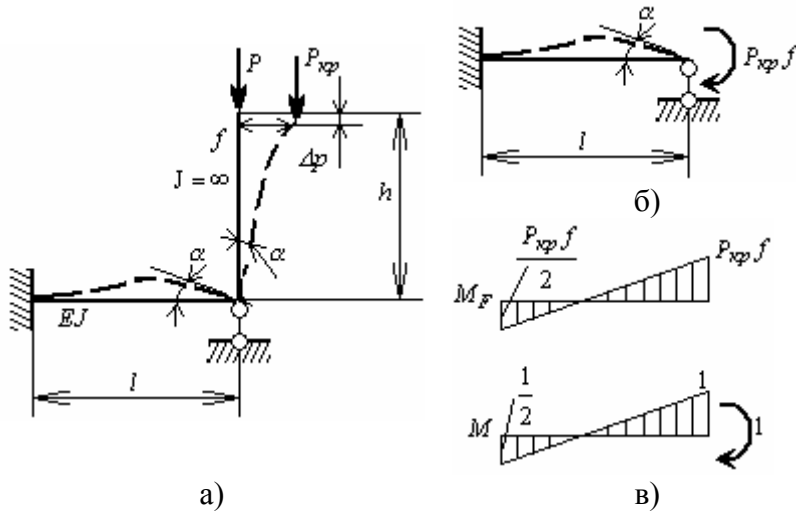


Рис. 27

$$\alpha = \int \frac{M_F \bar{M} dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (2P_{кр}f \cdot 1 + 2 \frac{P_{кр}f}{2} \frac{1}{2} - \frac{P_{кр}f}{2} \cdot 1 - \frac{P_{кр}f}{2}) = \frac{P_{кр}f \cdot l}{4EJ}.$$

Эпюры  $M_F$  и  $M$  построены по методу фокусов:

$$W = \frac{1}{2} P_{кр} f \frac{P_{кр} f \cdot l}{4EJ} = \frac{P_{кр}^2 f^2 l}{8EJ}; \quad f = h\alpha,$$

$$W = \frac{P_{кр} h^2 \alpha^2 l}{8EJ};$$

$$P_{кр} \frac{h\alpha^2}{2} = \frac{P_{кр}^2 h^2 \alpha^2 l}{8EJ}; \quad P_{кр} = \frac{4EJ}{hl}.$$

Пример 4 (рис.28). Так же для определения  $P_{кр}$ . применим энергетический метод.

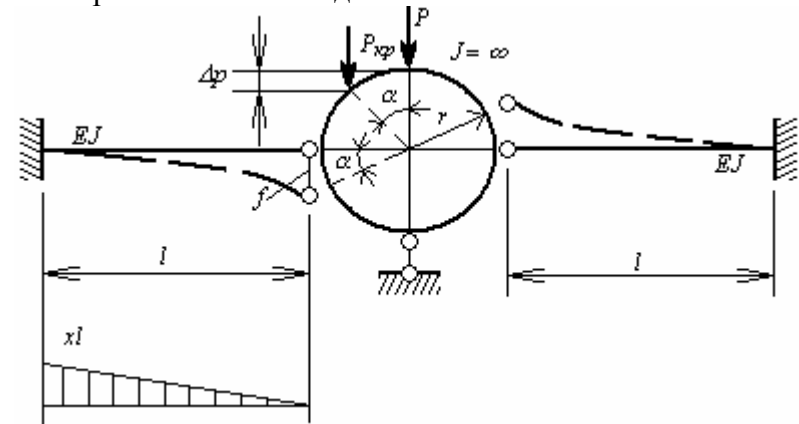


Рис. 28

$$A = W; \quad A = P\Delta p;$$

$$\Delta p = (r - r \cos \alpha) = \frac{rtq^2 \alpha}{2} = \frac{r\alpha^2}{2};$$

$$W = \frac{1}{2} Xf 2 = Xf;$$

$$f = \frac{Xl^3}{3EJ}; \quad X = \frac{f3EJ}{l^3}; \quad f = r\alpha;$$

$$W = \frac{f^2 3EJ}{l^3} = \frac{r^2 \alpha^2 3EJ}{l^3};$$

$$P_{кр} \frac{r \alpha^2}{2} = \frac{r^2 \alpha^2 3EJ}{l^3}; \quad P_{кр} = \frac{6EJr}{l^3}.$$

Пример 5 (рис. 29) Задачу определения  $P_{кр}$ . решим статическим способом.

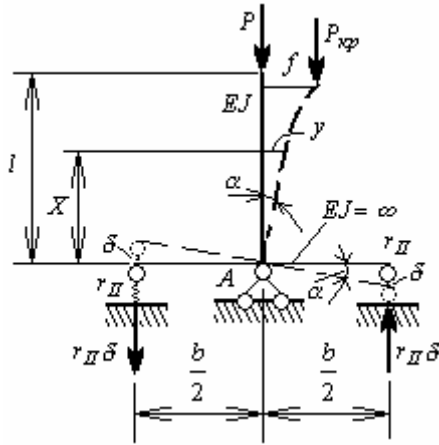


Рис. 29

$$EJy'' = M; \quad M = P_{кр}(f - y); \quad EJy'' = P_{кр}(f - y);$$

$$y'' + \frac{P_{кр}}{EJ}y = \frac{P_{кр}}{EJ}f; \quad \frac{P_{кр}}{EJ} = n^2;$$

$$y'' + n^2y = n^2f;$$

$$y = y_1 + y_2;$$

$$y_1 = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx \quad \text{частное решение } y_2.$$

Отклонение стержня при потере устойчивости пропорционально действующей силе и  $y_2 \sim P$ ,  $y_2'' = 0$ ,  $y_2 = f$  и полное решение будет:

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + f;$$

граничные условия:  $x=0 \quad y=0$  при

$$x=0 \quad y' = \alpha$$

$$x=l \quad y = f$$

$$1) \quad C_1 + f = 0; \quad C_1 = -f;$$

$$2) \quad y' = \alpha = -C_1 n \sin nx + C_2 n \cos nx; \quad \text{откуда } C_2 = \frac{\alpha}{n};$$

$$3) \quad f = -f \cos nl + \frac{\alpha}{n} \sin nl + f \quad (*).$$

Для того чтобы связать  $f$  и  $\alpha$ , составим уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно опоры А:

$$P_{кр}f - r_{II} \delta b = 0; \quad f = \frac{r_{II} \delta b}{F_{кр}} = \frac{r_{II} \delta b}{n^2 EJ};$$

подставим полученное значение в уравнение (\*), а также

$$\text{значение } \delta = \alpha \cdot \frac{b}{2}$$

$$-\frac{r_{II} b^2}{2n^2 EJ} \cos nl + \frac{\alpha}{n} \sin nl = 0.$$

$\frac{r_{II} b^2}{2EJ} = ntqnl$  - из этого уравнения подбором находится  $n$  и затем  $P_{кр}$ .

Пример 6 (рис. 30). Значение критической силы находим четырьмя способами.

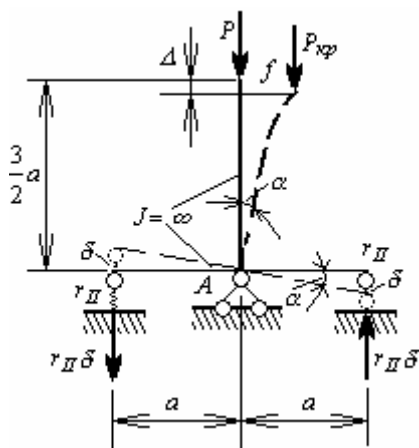


Рис. 30

1) Составим уравнение, выражающее равенство моментов внешних и внутренних сил – статический способ.

$$P_{кр} f - r_{II} \delta 2a = 0;$$

$$P_{кр} = \frac{r_{II} \delta 2a}{f}; \quad f = \frac{3}{2} a \cdot \alpha;$$

$$\delta = a \cdot \alpha$$

$$P_{кр} = \frac{r_{II} 2a^2 2\alpha}{3a\alpha} = \frac{4}{3} r_{II} a.$$

2) Приравняем нулю сумму работ внешних и внутренних сил при деформировании.

$$A = W; \quad A = P\Delta; \quad A = P_{кр} \frac{3}{4} a\alpha^2;$$

$$\Delta = \frac{3}{2} a - \frac{3}{2} a \cos \alpha = \frac{3}{2} a (1 - \cos \alpha) = \frac{3}{2} a \frac{tg^2 \alpha}{2} = \frac{3}{4} a\alpha^2;$$

$$W = \frac{1}{2} r_{II} \delta \cdot \delta \cdot 2 = \frac{1}{2} r_{II} a^2 \alpha^2 2; \quad \delta = a\alpha;$$

$$P_{кр} \frac{3}{4} a\alpha^2 = r_{II} a^2 \alpha^2; \quad P_{кр} = \frac{4}{3} r_{II} a.$$

3) Применяем принцип возможных перемещений, согласно которому возможная работа внутренних и внешних сил на бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю.

$$A = P_{кр} \frac{d\Delta}{d\alpha} = P_{кр} \frac{3}{4} a \cdot 2\alpha;$$

$$W = 2r_{II} \delta \frac{d\delta}{d\alpha} = 2r_{II} a\alpha\alpha;$$

$$P_{кр} \frac{3}{4} a 2\alpha = 2r_{II} a\alpha\alpha;$$

$$P_{кр} = \frac{4}{3} r_{II} a.$$

4) Применяем принцип минимума полной потенциальной энергии системы:

$$\frac{d}{d\alpha} (A + (-W)) = 0;$$

$$P_{кр} \frac{3}{4} a 2\alpha - 2r_{II} a\alpha\alpha = 0;$$

$$P_{кр} = \frac{4}{3} r_{II} a.$$

Пример 7 (рис. 31). Характеристическое уравнение для нахождения критических сил при симметричной и кососимметричной форме потери устойчивости получим статическим способом.

1) При симметричной форме потери устойчивости (рис. 31 а).

$$EJ_1 y'' = M; \quad M = P_{кр} y - Qx;$$

$$y'' + n^2 y = -\frac{Qx}{EJ}; \quad \text{где } n^2 = \frac{P_{кр}}{EJ_1};$$

$$y_1 = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx;$$

$$y_2 \sim P; \quad y_2'' = 0; \quad y_2 = -\frac{Qx}{n^2 EJ};$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx - \frac{Qx}{n^2 EJ}.$$

Граничные условия:

1) при  $x = 0; \quad y = 0; \quad C_1 = 0;$

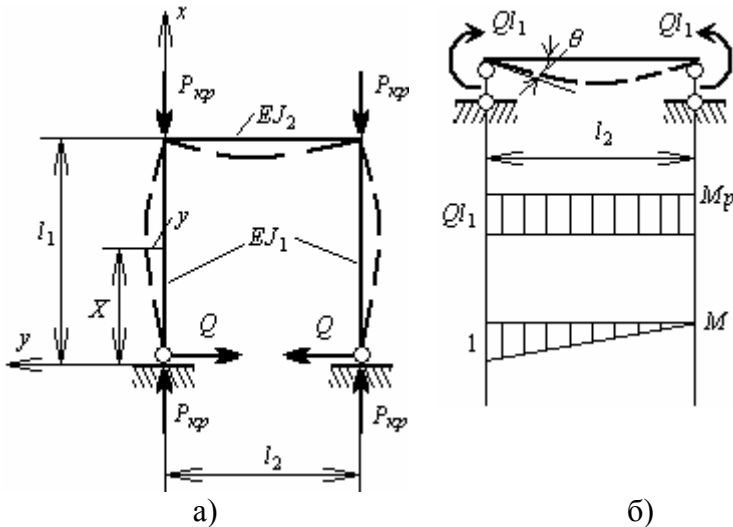


Рис. 31

$$2) \quad x = l; \quad y = 0; \quad C_2 \sin nl_1 - \frac{QL_1}{n^2 EJ} = 0;$$

$$3) \quad x = l_1; \quad y' = 0; \quad C_2 n \cos nl_1 - \frac{Q}{n^2 EJ}. \quad (*)$$

Q найдем из рассмотрения деформации ригеля по рис. 31, б:

$$Q = \sum \int \frac{M_F \overline{M_1 dx}}{EJ_2} = \frac{QL_1 \cdot l_2}{2EJ_2}; \quad \text{подставим в уравнение (*)}$$

$$C_2 n \cos nl_1 - \frac{Q}{n^2 EJ_1} - \frac{QL_1 \cdot l_2}{2EJ_1} = 0;$$

$$\begin{cases} C_2 \sin nl_1 - \frac{QL_1}{n^2 EJ} = 0 \\ C_2 n \cos nl_1 - Q \left( \frac{1}{n^2 EJ_1} + \frac{l_1 l_2}{2EJ_2} \right) \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} n^2 EJ_1 \sin nl_1 - l_1 \\ n^3 EJ_1 \cos nl_1 - \left( 1 + \frac{l_1 l_2 n^2 J_1}{2J_2} \right) \end{pmatrix} = 0 \quad (**)$$

Характеристическое уравнение оставим в форме детерминанта (\*\*).

## 11. Дифференциальное уравнение стержня и его интеграл

Пусть первоначально прямолинейный стержень (рис. 32) под действием продольной силы P потерял устойчивость изогнулся и переместился, как показано на рисунке 32.

Изгибающий момент в произвольном сечении будет равен:

$$P_{кр}(y - y_0) + M_0 + Q_0 x = M_x;$$

$$EJy'' = -M; \quad -F(y - Y_0) - M_0 - Q_0 x = EJy'';$$

$$y'' + \frac{P_{кр}}{EJ} y = -\frac{1}{EJ}(M_0 + Q_0 x - F_{кр} y_0); \quad \frac{P_{кр}}{EJ} = n^2;$$

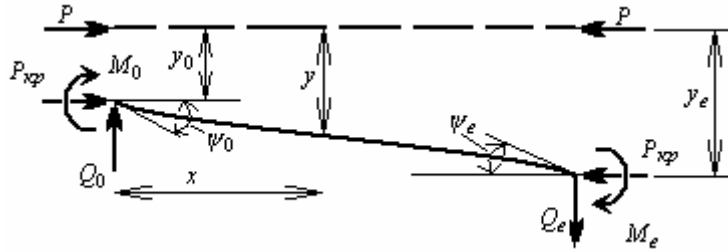


Рис. 32

$$y = y_1 + y_2; \quad y_1 = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx;$$

$$y_2 = B, \quad y_2'' = 0, \quad n_2 B = -\frac{1}{EJ}(M_0 + Q_0 x - P_{кр} y_0),$$

$$B = y_2 = -\frac{1}{n^2 EJ}(M_0 + Q_0 x - P_{кр} y_0);$$

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + y_0 - \frac{1}{n^2 EJ}(M_0 + Q_0 x); \quad (A),$$

граничные условия:

при  $x = 0, \quad y = y_0, \quad y' = \varphi_0$

$$1) \quad y_0 = C_2 + y_0 - \frac{M_0}{n^2 EJ}; \quad C_2 = \frac{M_0}{n^2 EJ};$$

$$2) \quad y' = \varphi_0 = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{Q_0}{n^2 EJ};$$

$$\varphi_0 = C_1 n - \frac{Q_0}{n^2 EJ}, \quad C_1 = \left(\varphi_0 + \frac{Q_0}{n^2 EJ}\right) \frac{1}{n}.$$

Подставим полученные значения произвольных постоянных в выражение (A)

$$y = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{Q_0}{n^3 EJ} \sin nx + \frac{M_0}{n^2 EJ} \cos nx + y_0 - \frac{M_0}{n^2 EJ} - \frac{Q_0 x}{n^2 EJ}$$

и после небольших преобразований, получим:

$$(*) \quad \begin{cases} y_x = y_0 + \frac{\varphi_0}{n} \sin nx + \frac{M_0}{n^2 EJ} (\cos nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EJ} (\sin nx - nx) \\ y' = \varphi_x = \varphi_0 \cos nx - \frac{M_0}{n EJ} \sin nx + \frac{Q_0}{n^2 EJ} (\cos nx - n) \\ EJy'' = -M_x = \varphi_0 n EJ \sin nx + M_0 \cos nx + \frac{Q_0}{n} \sin nx \\ EJy''' = Q_x = \varphi_0 n^2 EJ \cos nx - M_0 n \sin nx + Q_0 \cos nx \end{cases} \quad (11.1)$$

Получены формулы для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в форме метода начальных параметров -  $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0$ ; используя эти формулы можно найти критическую силу для стержней с любыми граничными условиями, в том числе и при упруго закрепленных концах.

### Примеры использования формул метода начальных параметров для определения критических сил

Пример 1. (рис. 33)

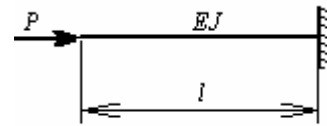


Рис. 33

Граничные условия:

$$x = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = 0;$$

$$x = l, \quad y_e = 0, \quad \varphi_e = 0;$$

Используя первое и второе уравнения из (\*), составим:

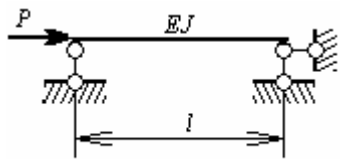
$$\begin{cases} y + \varphi_0 \frac{\sin nl}{n} = 0; \\ \varphi_0 \cos nl = 0 \end{cases}; \quad D = \begin{pmatrix} 1, & \frac{\sin nl}{n} \\ 0, & \cos nl \end{pmatrix} = 0;$$



$$D = \cos nl = 0, \quad nl = \frac{\pi}{2};$$

$$n^2 = \frac{P_{кр}}{EJ}; \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Пример 2. (рис.34)



Граничные условия:

$$x = 0, \quad y_0 = M_0 = 0$$

$$x = l, \quad y_e = 0, \quad M_e = 0$$

Рис. 34

Подставляя в первое и третье уравнения (\*), получим:

$$\begin{cases} \varphi_0 \frac{\sin nl}{n} + Q_0 \left( \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} \right) = 0; \\ \varphi_0 n EJ \sin nl + \frac{Q_0}{n} \sin nl \end{cases}$$

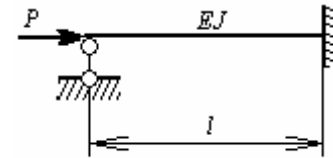
$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sin nl}{n}, & \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} \\ n EJ \sin nl, & \frac{\sin nl}{n} \end{pmatrix} = 0$$

$$D = \frac{\sin^2 nl}{n^2} - \left( \frac{\sin^2 nl - \sin nl \cdot nl}{n^2} \right) = \sin^2 nl - \sin^2 nl + \sin nl \cdot nl = 0$$

так как  $nl = 0$ , то  $\sin nl = 0$ ,  $nl = \pi$ ,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Пример 3 (рис. 35)



Граничные условия:

$$x = 0, \quad y_0 = 0, \quad M_0 = 0;$$

$$x = l, \quad y_e = 0, \quad \varphi_e = 0;$$

Рис. 35

Подставляя в первое и второе уравнение (\*), получим:

$$\begin{cases} \varphi_0 \frac{\sin nl}{n} + \frac{Q_0}{n^3 EJ} (\sin nl - nl) = 0; \\ \varphi_0 \cos nl + \frac{Q_0}{n^2 EJ} (\cos nl - 1) = 0 \end{cases};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sin nl}{n}, & \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} \\ \cos nl, & \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} \end{pmatrix} = 0$$

$$D = \sin nl \cdot \cos nl - \sin nl - \sin nl \cdot \cos nl + \cos nl \cdot nl = 0$$

$$Tqnl = nl, \quad nl = 4,493,$$

$$P_{кр} = \frac{(4,493)^2 EJ}{l^2}.$$

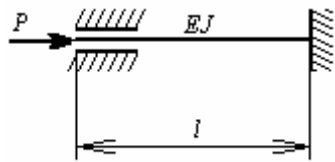
Пример 4 (рис.36)

Граничные условия:

$$x = 0, \quad y_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0;$$

$$x = l, \quad y_e = 0, \quad \varphi_e = 0;$$

Из первого и второго уравнений (\*) получим:



$$\begin{cases} M_0 \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} + Q_0 \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} = 0 \\ -M_0 \frac{\sin nl}{n EJ} + Q_0 \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} = 0 \end{cases};$$

Рис. 36

$$\begin{aligned} D &= ((\cos nl - 1)(\cos nl - 1) + \sin nl(\sin nl - nl)) = 0 \\ \cos^2 nl - \cos nl - \cos nl + 1 + \sin^2 nl - \sin nl \cdot nl &= 0 \\ -2 \cos nl + 2 - \sin nl \cdot nl &= 0 \end{aligned}$$

$$nl = 2\pi$$

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Пример 5 (рис. 37)

Граничные условия:

$$x = 0, \quad y_0 = M_0 = 0;$$

$$x = l, \quad y_e = 0,$$

$$\varphi_e = \phi = \frac{\delta}{a},$$

$$M_e = -2r_{II} \delta a$$

Из первого, второго и третьего уравнений (\*) получим:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_0}{n} \sin nl + \frac{Q_0}{n^3 EJ} (\sin nl - nl) = 0 \\ \varphi_0 \cos nl + \frac{Q_0}{n^2 EJ} (\cos nl - 1) = \frac{\delta}{a}; \\ \varphi_0 n EJ \sin nl + \frac{Q_0}{n} \sin nl = -2r_{II} \delta a \end{cases}$$

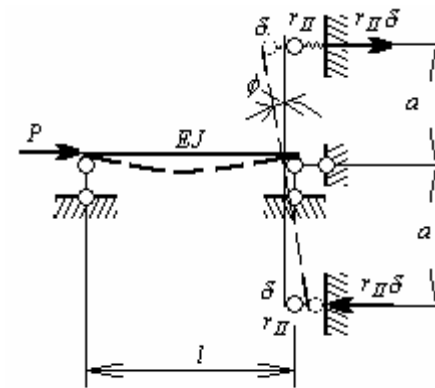


Рис. 37

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sin nl}{n}, & \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ}, & 0 \\ \cos nl, & \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ}, & -\frac{1}{a} \\ n EJ \sin nl, & \frac{\sin nl}{n}, & 2r_{II} a \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sin nl}{n} \begin{vmatrix} \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ}, & -\frac{1}{a} \\ \frac{\sin nl}{n}, & 2r_{II} a \end{vmatrix} - \cos nl \begin{vmatrix} \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} & 0 \\ \frac{\sin nl}{n}, & 2r_{II} a \end{vmatrix} \\ &+ n EJ \sin nl \begin{vmatrix} \frac{\sin nl - 1}{n^3 EJ}, & 0 \\ \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ}, & -\frac{1}{a} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin nl}{n} \left( \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} \right) 2r_{II} a + \frac{\sin^2 nl}{n^2} \frac{1}{a} - \cos nl \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} 2r_{II} a$$

$$- \frac{nEJ \sin nl}{a} \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} = \frac{\sin nl \cdot \cos nl \cdot 2r_{II} a}{n^3 EJ} - \frac{\sin nl}{n^3 EJ} 2r_{II} a$$

$$+ \frac{\sin^2 nl}{an^2} - \frac{\cos nl \sin nl}{n^3 EJ} 2r_{II} a + \frac{\cos nl \cdot nl}{n^3 EJ} 2r_{II} a - \frac{\sin^2 nl}{an^2} +$$

$$+ \frac{\sin nl \cdot nl}{an^2} = - \frac{\sin nl \cdot 2r_{II} a}{n^3 EJ} + \frac{\cos nl \cdot nl \cdot 2r_{II} a}{n^3 EJ} + \frac{\sin nl \cdot nl}{an^2} = 0$$

$$- t q n l \cdot \frac{2r_{II} a}{n^3 EJ} + t q n l \frac{l}{an} + \frac{2r_{II} a l}{n^2 EJ} = 0$$

$$t q n l = - \frac{2r_{II} a^2 \ln}{l \cdot n^2 EJ - 2r_{II} a^2} \quad (**)$$

Из формулы (\*\*) при известных величинах  $a$ ,  $l$ ,  $r_{II}$ ,  $EJ$  путем подбора определяется « $nl$ » и после этого  $F_{кр}$ .

Частные случаи:

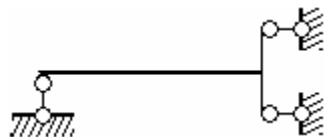
1)  $r_{II} = 0$



$$t q n l = 0, \quad n l = i \pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$P_{кр}^{min} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

2)  $r_{II} = \infty$



$$t q n l = n l; \quad n l = 4,493$$

$$P_{кр} = \frac{(4,493)^2 EJ}{l^2}.$$

## 12. Устойчивость рам

При рассмотрении вопросов устойчивости рам, также как и других систем, необходимо различать два типа задач.

- 1) потеря устойчивости первого рода;
- 2) потеря устойчивости второго рода (потеря несущей способности).

### Постановка задач и схема решения при расчете на потерю устойчивости первого рода

При исследовании устойчивости принимаются следующие допущения:

1. Рассматривается только узловая нагрузка, не вызывающая поперечного изгиба стержней.
2. Стержни считаются не сжимаемыми не растяжимыми.
3. Изменениями расстояния между концами стержня, которое получается благодаря его изгибу, пренебрегаем.
4. При расчете учитываются только нормальные силы, возникающие до потери устойчивости, то же относится и к поперечным силам.

Все указанные допущения, кроме первых двух, можно принять на основании того, что в момент потери устойчивости все перемещения рассматриваются весьма малыми.

Что касается первого допущения об исключительно узловой нагрузке, то здесь уместно провести аналогию с простыми сжимаемыми стержнями. Подобно тому, как в про-

стных сжимаемых стержнях не может иметь место практический случай строгого центрального сжатия, так и в рамах не может иметь место строго узловая нагрузка. Но известно, что внецентренная нагрузка в прямом стержне создает продольно-поперечный изгиб, при котором перемещения начинают весьма быстро нарастать при приближении сжимающей силы к величине критической. То же имеет место в рамах при поперечном изгибе её стержней. Поэтому определение критических сил в стержнях рамы при идеализированном нагружении, как и в простом, прямом стержне, является необходимым для оценки устойчивости при всех других видах загрузки рамы. Следует особо отметить, что постановка исследования устойчивости рам, считая элементы рамы только сжатыми, весьма приближенна, поскольку даже при узловых нагрузках (а такие нагрузки встречаются редко) собственный вес ригелей, как бы мал он не был, создает в самом начале нагружения деформированное состояние рамы с изгибом элементов.

Еще в большей степени это замечание относится к рамам, несущим нагрузку на ригелях, поскольку и такие рамы часто обследуются на устойчивость путем замены данной нагрузки узловой. В таких случаях узловая нагрузка подбирается так, чтобы продольные силы от неё в элементах рамы до потери устойчивости были равны продольным силам от заданной в общем виде нагрузки. Более грубо, узловая нагрузка получается путем замены заданной нагрузки по правилу рычага.

Такой приближенный расчет рам на устойчивость при узловых нагрузках способен лишь указать на самые большие и обычно не достижимые значения продольных сил в элементах рамы, при которых происходит потеря её устойчивости в упругой стадии.

Рассмотрим раму, представленную на рисунке 38.

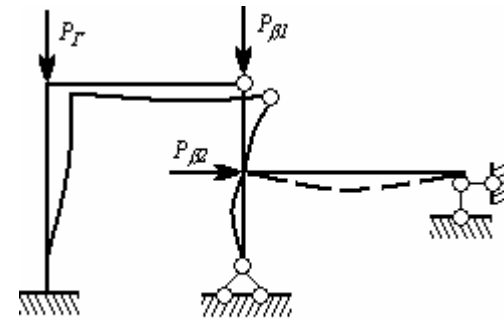


Рис. 38

Пока нагрузка меньше критической, возможной единственной формой равновесия будет прямолинейная форма, показанная на рисунке 38 сплошной линией. При критическом значении нагрузки, кроме прямолинейного положения равновесия, возможно ещё другое, изогнутое равновесное состояние (на рис. 38 показано пунктирной линией). Задачей расчета является определение критической нагрузки, по которой при заданном коэффициенте запаса можно определить расчетную нагрузку.

Поскольку новое изогнутое состояние есть состояние равновесия, расчет может быть произведен любым из методов, в том числе методом сил или методом перемещений.

При выборе основной системы следует всегда стремиться к тому, чтобы в основной системе не возникало изгибающих моментов от заданной нагрузки. При отсутствии моментов от нагрузки в основной системе все свободные члены канонических уравнений равны нулю и система уравнений приобретает вид:

Для метода сил:

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} = 0 \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} = 0 \end{cases}$$

Для метода перемещений:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} = 0 \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} = 0 \end{cases}$$

В этих уравнениях  $\delta_{ik}$ ,  $r_{ik}$ , соответственно, перемещения и реакции по направлению I от единичных лишних неизвестных при наличии продольных сил в стержнях. Таким образом, в  $\delta_{ik}$ ,  $r_{ik}$  входит параметр нагрузки F.

В изогнутом равновесном состоянии  $X_i = 0$ ,  $Z_i = 0$ , система же линейных однородных уравнений дает ненулевое решение для неизвестных только при равенстве нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных. Составляем определитель и, приравняв его к нулю, получаем так называемое уравнение устойчивости, из которого определяется критический параметр нагрузки.

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \dots \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \dots \delta_{2n} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \dots \delta_{nn} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \dots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \dots r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} \dots r_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

В расчетах на устойчивость для большинства типов рам метод перемещений требует более простых и менее трудоемких вычислений, чем метод сил.

### 13. Расчет рам на устойчивость методом перемещений

Выбор основной системы при расчете рам на устойчивость ничем не отличается от выбора основной системы при статическом расчете на прочность.

Так как мы рассматриваем рамы только с узловой нагрузкой, то реактивные моменты и усилия в фиктивных (поставленных) связях от нагрузок равны нулю и система канонических уравнений является однородной системой:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} = 0 \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} = 0 \end{cases}$$

Два решения этой системы:

$$1) Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$$

соответствует отсутствию изгиба до потери устойчивости.

$$2) Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad \dots Z_n = 0$$

решение возможно, если

$$D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \dots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \dots r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} \dots r_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Уравнение, полученное после раскрытия определителя, есть уравнение устойчивости.

#### 13.1. Вычисление реакций

Вычисление реакций от единичных смещений фиктивных связей должно быть проведено с учетом влияния сжимающих сил.

Так как выбором основной системы все стержни рамы превращаются в обособленные однопролетные балки двух типов: с двумя заделками по концам и заделкой на одном и шарнирном опирании на другом конце (как при статическом расчете) то, используя уравнения метода начальных параметров, произведем расчет данных балок.

Пример 1 (рис. 39).

При наличии продольной силы  $F_{кр}$  произведем поворот заделки А на  $Z=1$ .

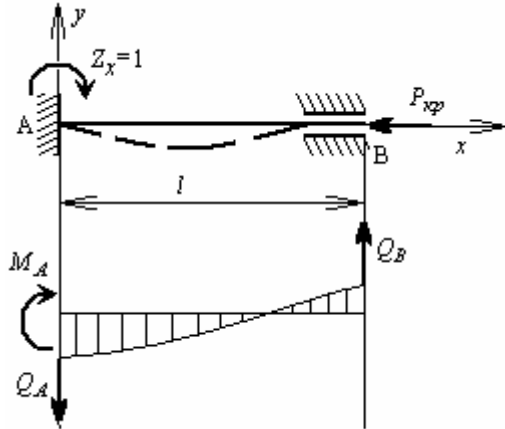


Рис. 39

Граничные условия:

При  $x = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = Z = 1$ .

При  $x = l$ ,  $y_e = 0$ ,  $\varphi_e = 0$ .

Подставим эти значения в первые два уравнения системы (11.1):

$$\begin{aligned} M_0 &= M_A, \quad Q_0 = Q_A. \\ \frac{\sin nl}{n} - \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} M_A + \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} Q_A &= 0; \\ \cos nl - \frac{\cos nl}{n EJ} M_A + \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} Q_A &= 0. \end{aligned}$$

Решая совместно и введя обозначение  $\nu = nl = l \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ}}$ ,

получим:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{4EJ}{l} \varphi_2(\nu); \quad Q_A = -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(\nu); \quad M_B = M_A - Q_A l; \\ M_B &= \frac{2EJ}{l} \varphi_3(\nu); \quad Q_B = -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(\nu); \quad Q_A = Q_B. \end{aligned}$$

Пример 2 (рис. 40).

Произведем смещение правой заделки на  $Z=1$  с учетом

$F_{кр}$ .

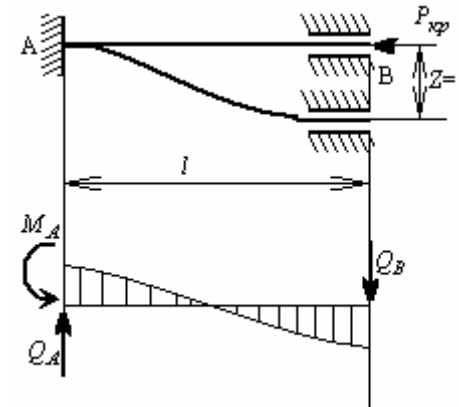


Рис. 40

Граничные условия:

При  $X = 0$   $y_0 = \varphi_0 = 0$ .

При  $X = l$   $\varphi_l = 0$   $y_l = 1$ .

Подставляя в первое и второе уравнения системы (11.1) и решая, находим:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(\nu); \quad M_B = \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(\nu); \\ Q_A &= \frac{12EJ}{l^3} \eta_2(\nu); \quad Q_B = Q_A. \end{aligned}$$

Пример 3 (рис.41).

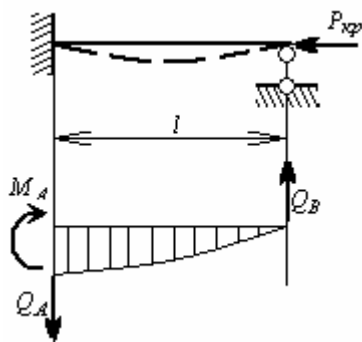


Рис. 41

Граничные условия:

При  $X = 0, y_0 = 0 \quad \varphi_0 = Z = 1.$

При  $X = l, y_e = 0, M_e = 0.$

Подставляя в первое и третье уравнение системы (11.1) и решая, получим:

$$M_A = \frac{3EJ}{l} \varphi_1(\nu); \quad Q_A = \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(\nu); \quad Q_B = Q_A.$$

Пример 4 (рис.42).

Граничные условия:

При  $X = 0, y_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$

При  $X = l, y_e = Z_1 = 1 \quad M_e = 0$

Подставляя в первое и третье уравнение системы (11.1) и решая, получим:

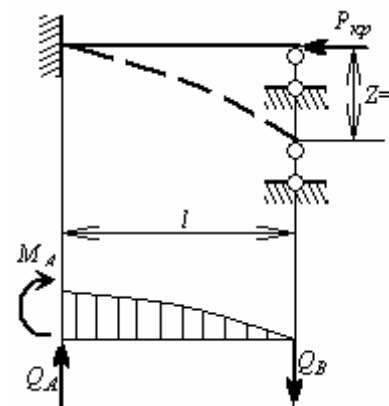


Рис. 42

$$M_A = \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(\nu); \quad Q_A = \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(\nu); \quad Q_A = Q_B.$$

### 13.2 Примеры расчетов

Пример 1 (рис. 43). Требуется найти критическую силу. Основная система и единичные эпюры показаны на рис. 44.

Продольная сила в ригеле равна нулю, в стойке F. Каноническое уравнение имеет вид

$Z_1 r_{11} = 0$  так как  $Z_1 \neq 0$ , то  $r_{11} = 0$  - уравнение устойчивости.

$$r_{11} = \frac{4EJ}{4} \varphi_2(\nu) + \frac{3 \cdot 2EJ}{3} = 0;$$

$$EJ \varphi_2(\nu) + 2EJ = 0.$$

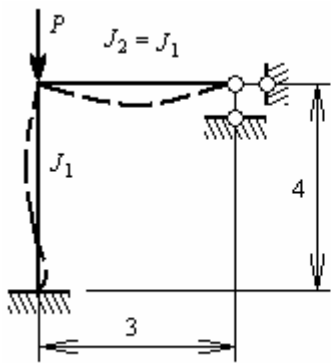


Рис. 43

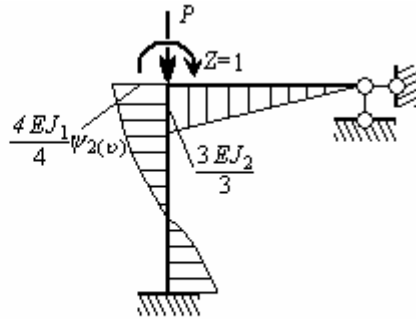


Рис. 44

$\varphi_2(\nu) + 2 = 0$ , так как  $EJ \neq 0$ .

Из таблицы функций метода перемещений находим  $\nu = 5,66$ .

$$P_{кр} = \frac{\nu^2 EJ}{l^2} = \frac{5,66^2 EJ}{4^2};$$

коэффициент свободной длины стойки ( $\mu$ ) найдем:

$$\frac{\nu^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad \mu = \frac{\pi}{\nu} = \frac{3,14}{5,66} = 0,555,$$

то есть стойка работает в условиях, близких к полному защемлению верхнего конца (как и следовало ожидать, ввиду большой жесткости ригеля). Расчетная длина стойки  $l_0 = \mu l = 0,555 \cdot 4 = 2,22 м$  является исходной величиной для нахождения коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  в зависимости от расчетной гибкости и материала стержня по таблицам из СНИП.

Пример 2 (Рис. 45). Требуется определить критический параметр нагрузки. Основная система и единичная эпюра представлены на рисунке 45.

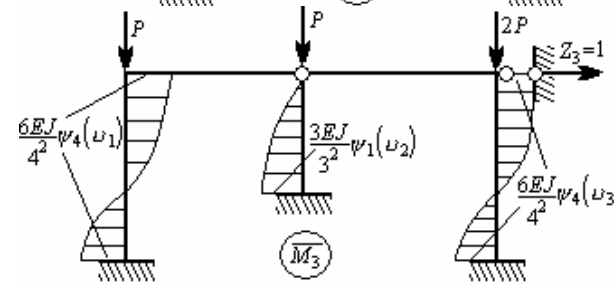
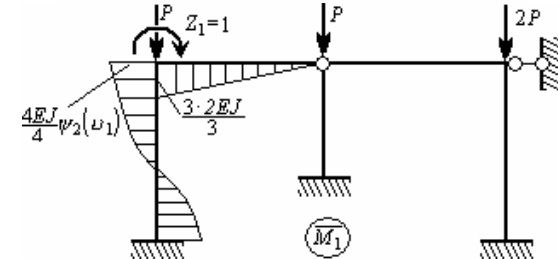
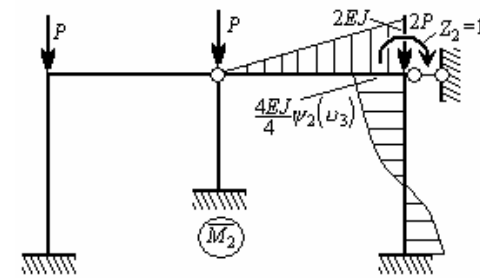
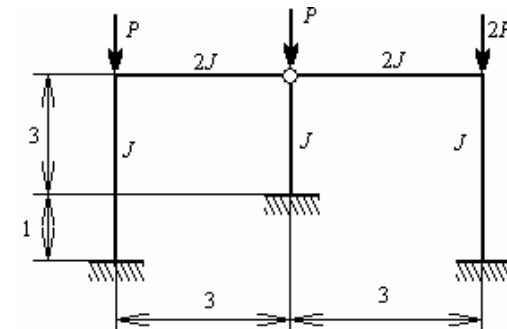


Рис. 45



$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} = 0 \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Во всех трех стойках будут различные величины  $\nu$ , так как продольные силы и длина различны.

1) для левой стойки  $\nu_1 = 4\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \nu$ ,

2) для средней стойки  $\nu_2 = 3\sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0,75\nu$ ,

3) для правой стойки  $\nu_3 = 4\sqrt{\frac{2P}{EJ}} = 1,41\nu$ .

На единичных эпюрах при коэффициентах  $\varphi_1(\nu)$ ,  $\varphi_2(\nu)$ ,  $\varphi_4(\nu)$  поставлены в скобках те же значения ( $\nu$ ), которым эти коэффициенты соответствуют.

Значения коэффициентов:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{4} \varphi_2(\nu_1) + 2EJ = EJ[\varphi_2(\nu) + 2];$$

$$r_{22} = \frac{4EJ}{4} \varphi_2(\nu_3) + 2EJ = EJ[\varphi_2(1,41\nu) + 2];$$

$$r_{33} = \frac{12EJ}{4^3} [\eta_2(\nu_1) + \eta_2(\nu_3)] + \frac{3EJ}{3^3} \eta_1(\nu_2) =$$

$$= EJ[0,187(\eta_2(\nu) + \eta_2(1,41\nu)) + 0,111\eta_1(0,75\nu)];$$

$$r_{12} = r_{21} = 0, \quad r_{13} = r_{31} = -\frac{6EJ}{4^2} \varphi_4(\nu_1) = -EJ \cdot 0,37\varphi_4(\nu);$$

$$r_{32} = r_{23} = -\frac{6EJ}{4^2} \varphi_4(\nu_3) = -0,375EJ\varphi_4(1,41\nu);$$

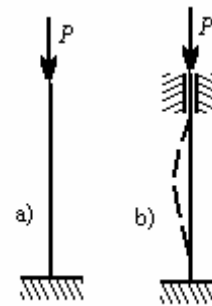
$$D = r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33} - r_{13}^2 r_{22} - r_{23}^2 r_{11} = 0.$$

Подставим в это уравнение найденные значения коэффициентов и, произведя небольшие преобразования, получим сложное трансцендентное уравнение (так называемое уравнение устойчивости), которое надо решить путем подбора:

$$12[\eta_2(\nu) + \eta_2(1,41\nu)] + 7,11\eta_1(0,75\nu) =$$

$$= \frac{9[\varphi_4(\nu)]^2}{\varphi_2(\nu) + 2} + \frac{[2\varphi_2(1,41\nu) + \varphi_3(1,41\nu)]^2}{\varphi_2(1,41\nu) + 2}.$$

Раньше чем задаться каким-то значением  $\nu$ , целесообразно посмотреть, в каких пределах оно может изменяться. Левая стойка рамы находится в таких условиях, что её верхний конец может смещаться по горизонтали (но смещению сопротивляется жесткость других стоек) и упруго поворачиваться (повороту сопротивляется жесткость ригеля), следовательно, критическая сила стойки рамы будет выше, чем для стержня, показанного на рисунке 46, б. Находим значение  $\nu$  для этих двух случаев.



Для случая а:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = \frac{\nu^2 EJ}{l^2},$$

$$\text{откуда } \nu = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Для случая б:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\nu^2 EJ}{l^2},$$

$$\text{откуда } \nu = 2\pi = 6,28.$$

Рис. 46

В нашем случае  $6,28 \phi \nu \phi 1,57$ .

Так как диапазон все ещё достаточно широк, отметим, что возможность горизонтальных смещений значительно уменьшает жесткость системы и поэтому целесообразно задаваться значением, более близким к нижнему пределу.

1) Задаемся значениями

$$\nu = 2; \quad 1,41\nu = 2,82; \quad 0,75\nu = 1,5$$

По таблице находим:

$$\varphi_2(\nu) = 0,8590; \quad \varphi_2(1,41\nu) = 0,7016; \quad \varphi_3(1,41\nu) = 1,1744;$$

$$\varphi_4(\nu) = 0,9313; \quad \eta(0,75\nu) = 0,0893; \quad \eta_2(\nu) = 0,598;$$

$$\eta_2(1,41\nu) = 0,1965.$$

Обозначив левую часть уравнения устойчивости буквой А, правую – буквой В, получаем:

$$A_1 = 12[0,598 + 0,197] + 7,11 \cdot 0,0893 = 10,167$$

$$B_1 = \frac{9 \cdot 0,9313^2}{0,8590 + 2} + \frac{(2 \cdot 0,7016 + 1,1745)^2}{0,7016 + 2} = 5,20$$

2) Задаемся значениями

$$\nu = 2,5; \quad 1,41\nu = 3,52; \quad 0,75\nu = 1,88;$$

$$\varphi_2(\nu) = 0,772; \quad \varphi_2(1,41\nu) = 0,495;$$

$$\varphi_3(1,41\nu) = 1,327; \quad \varphi_4(\nu) = 0,8909;$$

$$\eta_1(0,75\nu) = -0,4420; \quad \eta_2(\nu) = 0,3701; \quad \eta_3(1,41\nu) = -0,2602.$$

$$A_2 = -1,84; \quad B_2 = 4,73.$$

Построим график изменения величин А и В, считая их изменяющимися по линейному закону в небольшом диапазоне  $\nu$  ( $2,5 > \nu < 2,0$ ) (рис. 46). Принимаем  $\nu=2,23$ . Критический параметр нагрузки:

$$P_{кр} = \frac{\nu^2 EJ}{l^2} = \frac{2,23^2 EJ}{4^2} = 0,311EJ.$$

Коэффициенты свободных длин стоек:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{\nu_1} = \frac{3,14}{2,23} = 1,41,$$

$$\mu_2 = \frac{\pi}{\nu_1} = \frac{3,14}{0,75 \cdot 2,23} = 1,87,$$

$$\mu_3 = \frac{\pi}{\nu_3} = \frac{3,14}{1,41 \cdot 2,23} = 1,0.$$

### 13.31. Использование симметрии

В методе перемещений использование симметрии при расчете на устойчивость возможно только при симметричной нагрузке. При симметричной нагрузке в момент потери устойчивости возможны как симметричные, так и кососимметричные формы потери устойчивости. В общем случае невозможно заранее установить, какому виду деформации соответствует наименьшая критическая нагрузка, поэтому приходится рассматривать оба вида деформации.

Пример: (рис.47).

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} = 0$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} = 0$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} = 0$$

$$D_1 = r_{11} = 0$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Так как в крайних стойках нет продольной силы, то  $r_{11} \neq 0$ , следовательно,  $Z_1 = 0$  и рама теряет устойчивость по кососимметричной форме.

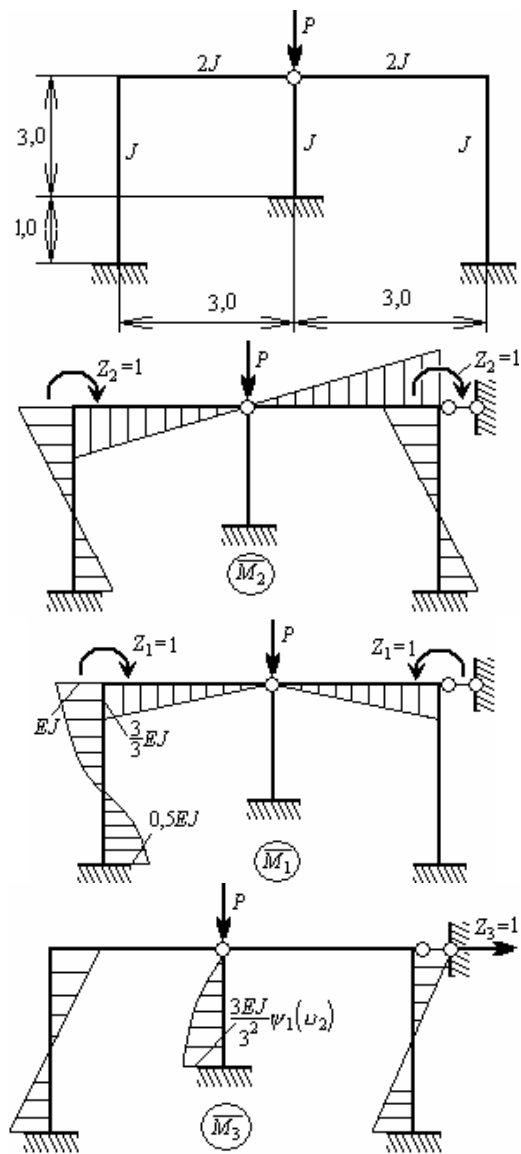


Рис. 47

$$r_{22} = 3EJ2 = 6EJ;$$

$$r_{33} = \frac{12EJ}{4^3}2 + \frac{3EJ}{3^3}h_1(\nu) = EJ[0,375 + 0,111h_1(\nu)];$$

$$r_{23} = r_{32} = -\frac{6EJ}{4^2}2 = -0,75EJ;$$

$$r_{22}r_{33} - r_{23}^2 = 6[0,375 + 0,111h_1(\nu)] - 0,75^2 = 0;$$

$$h_1(\nu) = -2,53; \quad \nu = 2,88;$$

$$P_{кр} = \frac{2,88^2 EJ}{3^2} = 0,92EJ.$$

Коэффициент длины:  $\mu = \frac{\pi}{\nu} = \frac{3,14}{2,88} = 1,09.$

#### 14. Расчет рам на устойчивость методом сил

Для получения однородной системы уравнений основная система должна быть выбрана так, чтобы в ней не возникало изгибающих моментов от заданной узловой нагрузки. В критическом состоянии рама изгибается и элементах её возникают изгибающие моменты (рис.48).

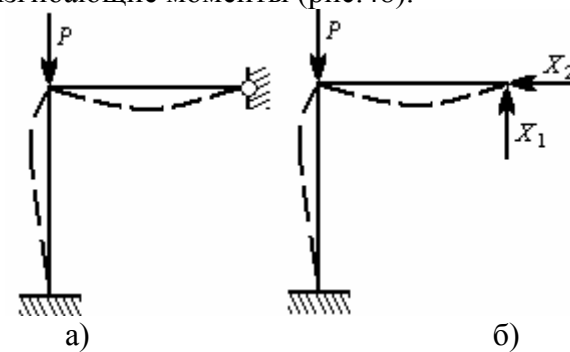


Рис. 48

С учетом предыдущего принимаем основную систему по рисунку 48 б.

Канонические уравнения имеют вид:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0.$$

так как  $X_1 \neq 0$   $X_2 \neq 0$ , то

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

При вычислении перемещений учитывается влияние продольной силы на изгибные деформации.

Первостепенное значение будет иметь упрощение вычислений коэффициентов.

Если, пользуясь формулой Мора, ограничиться только членом  $\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_k dx}{EJ}$  где эпюра  $\bar{M}_i$  будет состоять только из прямолинейных участков, а эпюра  $M_k$  («грузовая» т.е. построенная с учетом продольной силы) – будет криволинейна на тех стержнях, где есть продольная сила.

Наиболее прост интеграл Мора вычисляется в тех случаях (основных системах), в которых сжатые стержни представляют собой простые балки с шарнирно-опертыми не смещающимися концами или балки, защемленные одним концом.

#### 14.1 Правила вычисления перемещений (интеграла Мора) при расчете на устойчивость методом сил

а) Стержень заделан одним концом (рис. 49).

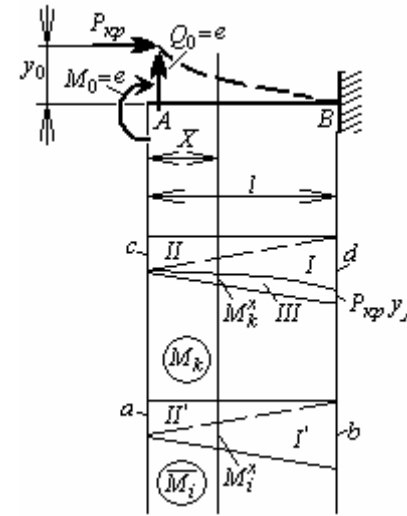


Рис. 49

Стержень нагружен произвольной поперечной силой  $Q_0 = e$ , произвольным моментом  $M_0 = C$  и продольной силой  $F_{kp}$ .

Эпюра изгибающих моментов будет криволинейна, причем момент в заделке

$$M_B = C + el + P_{kp} y_a = d + P_{kp} y_a,$$

где  $d$  – момент от поперечной нагрузки.

Выражение для изгибающего момента в произвольном сечении  $M_k^x$  получим, воспользовавшись уравнениями метода начальных параметров.

При  $x = l$ ;  $\varphi_e = 0$  подставим во второе уравнение, получим:  $n_e = \nu$ .

$$\cos nl \cdot \varphi_a - \frac{\sin nl}{nEJ} C + \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} = 0;$$

$$\frac{tqv}{\nu} \frac{l}{EJ} C - \frac{\cos \nu - 1}{\cos \nu} \frac{l^2}{\nu^2 EJ} e = \varphi_a.$$

Подставим значение  $\varphi_a$  в третье уравнение, получим:

$$C \cos \frac{\nu x}{l} + \left[ \frac{C(\nu \sin \nu - 1) + d}{\nu \cos \nu} \right] \sin \frac{\nu x}{l} = M_k^x.$$

Эпюра  $\overline{M}_i$  от единичного воздействия всегда прямолинейна и момент в произвольном сечении равен:

$$M_k^x = a + \frac{b-a}{l} x.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \int_0^e \overline{M}_i M_k dx &= c' \int_0^e \cos \frac{\nu x}{l} \left( a + \frac{b-a}{l} x \right) dx + \\ &+ \frac{C(\nu \sin \nu - 1) + d}{\nu \cos \nu} \int_0^e \sin \frac{\nu x}{l} \left( a + \frac{b-a}{l} x \right) dx = (*) \\ &= \frac{bdl}{3} \Theta_1(\nu) + \frac{acl}{3} \Theta_2(\nu) + \left( \frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6} \right) \Theta_3(\nu). \end{aligned}$$

Формула (\*) показывает, что при определении перемещений в стержне, заделанном одним концом, следует учитывать эпюру моментов только от действия поперечных нагрузок; влияние сжимающей силы  $P_{кр}$  учитывается поправочными коэффициентами  $\Theta_1(\nu)$ ,  $\Theta_2(\nu)$ ,  $\Theta_3(\nu)$ .

Вычисление перемещений производится перемножением одноименных треугольников  $I$  и  $I'$  и  $II$  и  $II'$  с поправочными коэффициентами  $Q_1(\nu)$ ,  $Q_2(\nu)$  и разноименных треугольников  $I$  на  $II$  и  $II'$  на  $I$  с поправкой  $Q_3(\nu)$ .

Пример (рис. 50). Основную систему выбираем, разрезая раму по шарниру

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = 0$$

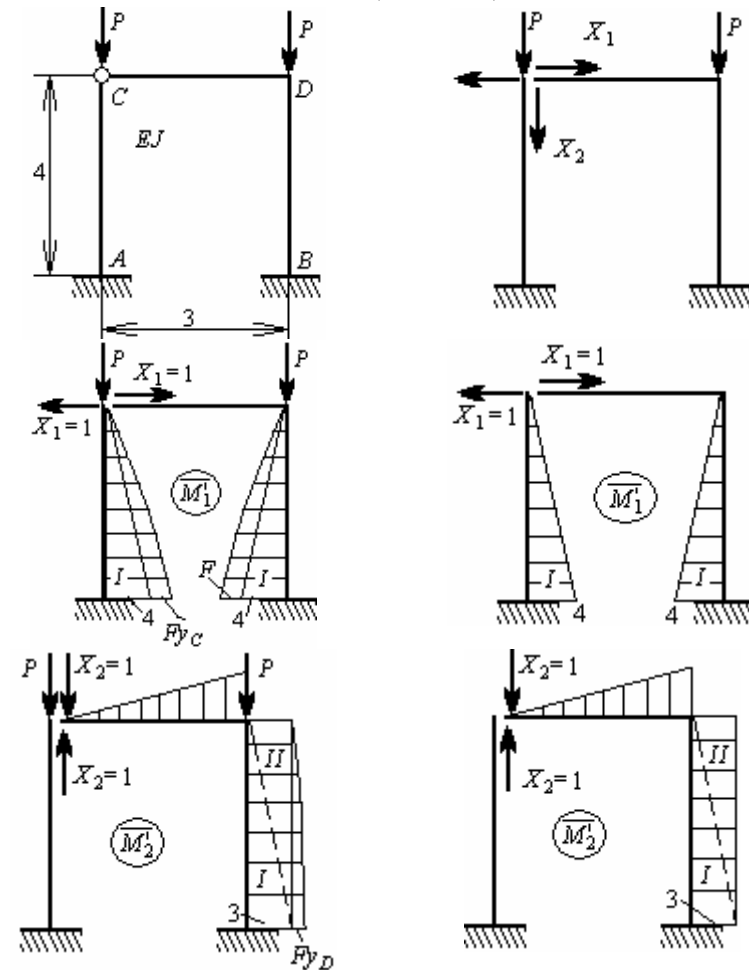


Рис. 50

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M_1 M_1} dx}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M_1 M_1'} dx}{EJ}$$

На стержнях AC, BD поперечной нагрузкой  $Q = e = X_1 = 1$ .  
 $M_c = M_D = C = 0$ .

$$\delta_{11} = \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{EJ} \Theta_1(\nu) \cdot 2 = \frac{128}{3EJ} \Theta_1(\nu)$$

$M = C = 3 \quad Q = 0$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\overline{M_1 M_2} dx}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M_1 M_2'} dx}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M_2 M_1'} dx}{EJ} =$$

$$= -\frac{4 \cdot 3}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} Q_1(\nu) - \frac{4 \cdot 3}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{EJ} Q_3(\nu);$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M_2 M_2'} dx}{EJ} = \frac{3 \cdot 3}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} + \frac{3 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} Q_1(\nu) +$$

$$+ \frac{3 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} Q_2(\nu) + \frac{3 \cdot 4}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{EJ} = \frac{9}{EJ} + \frac{12}{EJ} Q_1(\nu) + \frac{6}{EJ} Q_3(\nu)$$

б) Стержень шарнирно - опертый по концам (рис. 51).

$$X = 0 \quad y_A = 0 \quad \varphi_0 = \varphi_A$$

$$M_0 = M_A = C; \quad Q_0 = \frac{d - C}{l};$$

$$X = l; \quad y_B = y_l = 0$$

Подставим в первое уравнение:

$$0 = 0 + \frac{\sin nl}{n} \varphi_A + \frac{\cos nl - 1}{n^2 EJ} C + \frac{\sin nl - nl}{n^3 EJ} \frac{d - C}{l};$$

$$\varphi_A = \frac{l}{\nu^2 EJ} \left[ -\frac{C\nu}{tq\nu} + \frac{C\nu}{\sin \nu} - d + l + \frac{\nu d}{\sin \nu} - \frac{\nu l}{\sin \nu} \right].$$

Подставим в третье уравнение и после преобразований получим:

$$M_i^X = C \cos \frac{\nu x}{l} + \left( \frac{d}{\sin \nu} - \frac{C}{tq\nu} \right) \sin \frac{\nu x}{l}.$$

Таким образом:

$$\int_0^l M_k \overline{M_i} dx = C \int \cos \frac{\nu x}{l} \left( a + \frac{b-a}{l} x \right) dx + \left( \frac{d}{\sin \nu} - \frac{C}{tq\nu} \right) \int_0^l \sin \frac{\nu x}{l} \times$$

$$\times \left( a + \frac{b-a}{l} x \right) dx = \left( \frac{aCl}{3} + \frac{bdl}{3} \right) \Theta_4(\nu) + \left( \frac{bCl}{6} + \frac{adl}{6} \right) \Theta_5(\nu).$$

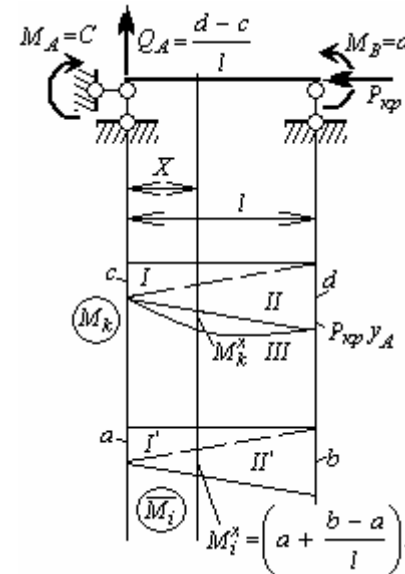


Рис. 51

Перемножаются только трапеции эпюр моментов  $M_k$  и  $\overline{M_i}$  от поперечной нагрузки, без учета эпюры от сжимающей силы, влияние которой учитывается поправочными коэффициентами  $\Theta_4(\nu)$  и  $\Theta_5(\nu)$ , т.е. перемножаются одноименные треугольники I и I', II и II' с  $\Theta_4(\nu)$  и разноименные I и II', II и I' с поправкой  $\Theta_5(\nu)$ .

Рассмотренных двух случаев достаточно для применения метода сил в

расчетах на устойчивость.

Другие случаи вычисления перемещений (вычисления интеграла Мора) более сложные и здесь не будут рассматриваться.

## 15. Дополнительные замечания к выбору основной системы

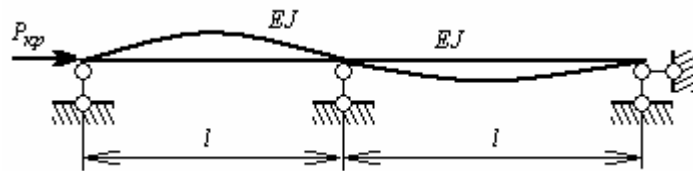
Подводя итоги вышесказанному, необходимо выделить основные требования к основной системе метода сил.

1) В основной системе от нагрузки (узловой) изгибающие моменты должны отсутствовать.

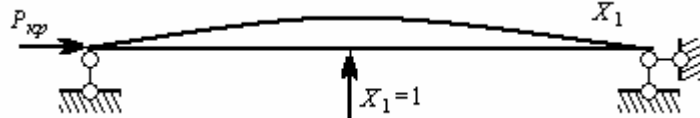
2) Сжатые продольной силой стержни должны быть двух типов, вычисление интегралов для которых мы рассмотрели.

3) Основная система и характер её деформирования не должны противоречить форме искривления заданной системы при потере устойчивости, т.е. она не должна быть «ложной».

Пример (рис. 52).



Истинная форма потери устойчивости



a) Вызывает смещение сечения стержня



b) Вызывает поворот сечения стержня

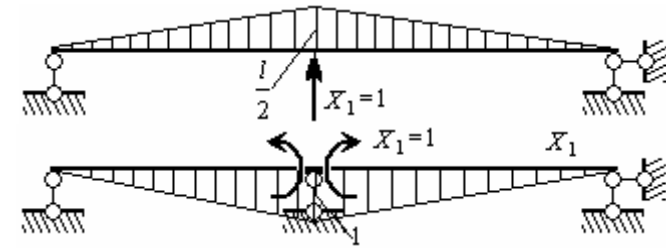


Рис. 52

$$\text{Для схемы а): } \delta_n = \frac{l}{2} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} \Theta_1(\nu) 2 = \frac{l^3}{6EJ} \Theta_1(\nu);$$

$$\frac{l^3}{6EJ} \neq 0 \quad \Theta_1(\nu) = 0 \quad \nu = 4,49;$$

$$P_{кр} = \frac{20,2EJ}{l^2}.$$

$$\text{Для схемы б): } \delta_{11} = \frac{l}{2} \frac{2}{3} 1 \Theta_4(\nu) 2 \frac{1}{EJ} \Theta_4(\nu);$$

$$\Theta_4(\nu) = 0 \quad \nu = 3,14;$$

$$P_{кр} = \frac{9,87EJ}{l^2}.$$

## 16. Устойчивость арок

### 16.1. Дифференциальное уравнение равновесия кругового стержня

Рассмотрим бесконечно малый элемент кривого бруса ab с центральным углом  $d\phi$  и радиусом  $\rho$  (рис. 53).

$\nu$  - перемещение точки a по нормали,

$\omega$  - перемещение точки a по касательной,

$\nu + d\nu$  - перемещение точки b по касательной,

$\omega + d\omega$  - перемещение точки b по нормали,

$a^1b^1$ ,  $d\phi$ ,  $\rho$  - новые параметры (после перемещения),

$\Theta$  угол между касательными в точке  $a$  и  $a^1$ ,

$\Theta_1$  угол между касательными в точке  $b$  и  $b^1$ ,

$$\Theta_1 - \Theta = d\varphi_1 - d\varphi, \quad d\Theta = \Theta_1 - \Theta = d\varphi_1 - d\varphi,$$

$$dS = \rho d\varphi, \quad dS_1 = \rho_1 d\varphi.$$

$$\frac{d\Theta}{dS} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ} \quad (1)$$

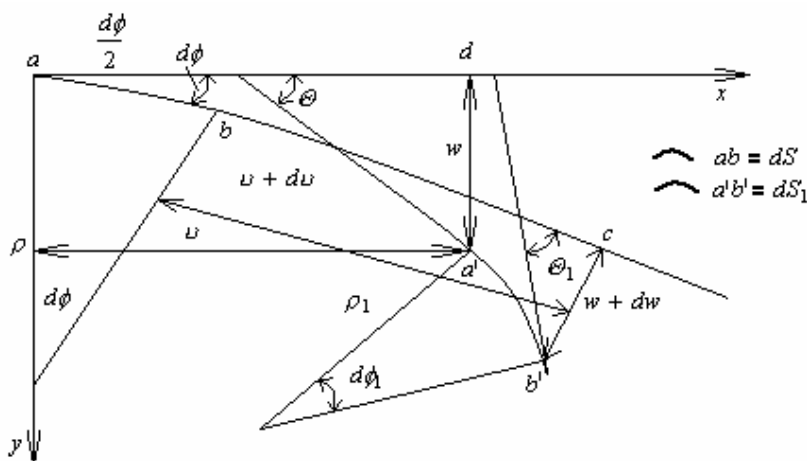


Рис. 53

Составим теперь проекцию замкнутой линии  $abc b' a' da$  на координатные оси.

$$\sum X = dS \cos \frac{d\varphi}{2} + (v + dv) \cos d\varphi - (\omega + d\omega) \sin d\varphi -$$

$$- dS_1 \cos \left( \Theta + \frac{d\varphi_1}{2} \right) - v = 0$$

$$\sum Y = dS \sin \frac{d\varphi}{2} + (v + dv) \sin d\varphi + (\omega + d\omega) \cos d\varphi -$$

$$- dS_1 \sin \left( \Theta + \frac{d\varphi_1}{2} \right) - \omega = 0$$

Учитывая бесконечную малость первого порядка, будем иметь:

$$\begin{cases} dS + dv - \omega d\varphi = dS_1 \cos \Theta \\ v d\varphi + d\omega = dS_1 \sin \Theta \end{cases}$$

Считая  $dS = dS_1$  по малости углов  $\Theta$  получим:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dS} - \frac{\omega d\varphi}{dS} = 0 \\ \frac{v d\varphi + d\omega}{dS} = \Theta \end{cases} \begin{cases} \frac{dv}{dS} = \frac{\omega}{\rho} \\ \frac{v}{\rho} + \frac{d\omega}{dS} = \Theta \end{cases}$$

Для кругового бруса с радиусом  $\eta$  получим:

$$\frac{d^2 \omega}{dS^2} + \frac{\omega}{\eta^2} = -\frac{M}{EJ} \quad \text{или}$$

$\frac{d^2 \omega}{dS^2} + \omega = -\frac{M\eta^2}{EJ}$  - дифференциальное уравнение равновесия бруса, очерченного по окружности в полярных координатах.



## 16.2. Устойчивость круговой двухшарнирной арки при гидростатическом давлении

Круговая двухшарнирная арка при радиальной равномерно распределенной нагрузке испытывает во всех сечениях центральное сжатие. При достижении нагрузкой  $q$  критического значения она теряет устойчивость деформации сжатия и искривляется.

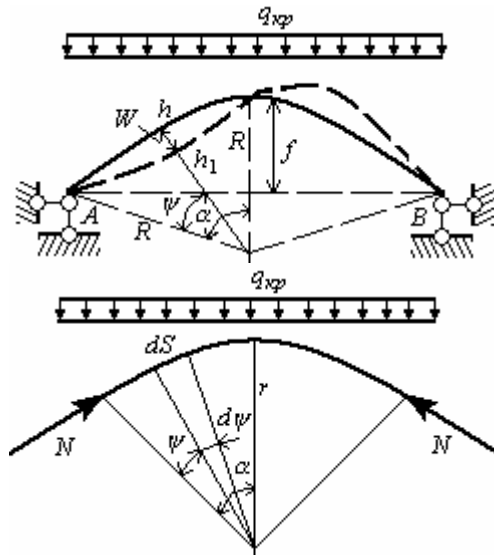


Рис. 54

$$Rq = 2 \int_0^{\alpha} qdS \cos \varphi = 2 \int_0^{\alpha} qr \cos \varphi d\varphi = 2qr \sin \alpha$$

$$\sum y = 0 \quad -2N \sin \alpha + 2qr \sin \alpha = 0 \quad N = rq$$

Продольная сила в любом сечении равна  $N = qr$ . При этом значении  $N$  - изгибающий момент в любом сечении  $M_{\varphi} = N \cdot w = qRw$ .

Дифференциальное уравнение изгиба принимает вид:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \left( 1 + \frac{qR^3}{EJ} \right) = 0 \quad \text{обозначим } n = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EJ}};$$

$w'' + n^2 w = 0$  интеграл этого уравнения:  
 $w = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi$ .

При  $\varphi = 0; w = 0; \varphi = \alpha; w = 0$ . откуда  $A = 0; B \sin n\alpha = 0$ . Так как  $B \neq 0$ ,  $\sin nR = 0; n\alpha = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$  наименьшему значению критической нагрузки соответствует  $n\alpha = \pi$ ; отсюда:

$$\frac{\pi^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{qR^3}{EJ}; \quad q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (*)$$

В частном случае при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  получаем  $q_{кр} = 3 \frac{EJ}{R^3}$ . Для

пологих арок, когда угол  $\alpha$  мал по сравнению с  $\pi$ , в формуле (\*) можно отбросить единицу, тогда получаем приближенное значение критической нагрузки

$$q_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{\alpha^2 R^3};$$

$$N_{кр} = q_{кр} R = \frac{\pi^2 EJ}{(\alpha R)^2}; \quad \alpha R = S \text{ - длина дуги полуарки.}$$

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{S^2},$$

Таким образом, для пологой арки  $\left( \frac{1}{l} \leq \frac{1}{\tau} \right)$  критическая

продольная сила может быть подсчитана по обычной формуле Эйлера, как для стержня, шарнирно-опертого по концам с длиной, равной половине длины дуги арки.

Пример: Для  $2\alpha = 60^\circ$  имеем  $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ;

$$q_{кр} = \left[ \frac{\pi^2}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} - 1 \right] \frac{EJ}{R^3} = (36 - 1) \frac{EJ}{R^3} = 35 \frac{EJ}{R^3}.$$

### 16.3. Устойчивость бесшарнирной арки

Для случая, когда концы арки заделаны, наименьшей критической нагрузке соответствует кососимметричная деформация оси (рис.55).

Задача отличается от предыдущей наличием моментов в заделке  $M_0$ .

Превратив бесшарнирную арку в двухшарнирную и приложив момент  $M_0$  в сечения А и В, получим в каждой точке двухшарнирной арки дополнительные изгибающие моменты. В произвольном сечении на расстоянии  $x$  -

$$M_x = -M_0 \frac{2x}{l}$$

$$X = R \sin \varphi; \quad l = 2R \sin \alpha, \quad \text{то}$$

$$M_x = -M_0 \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$$

Полный изгибающий момент в любом поперечном сечении равен

$$M_\varphi = qRw - M_0 \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha};$$

Дифференциальное уравнение равновесия принимает вид:

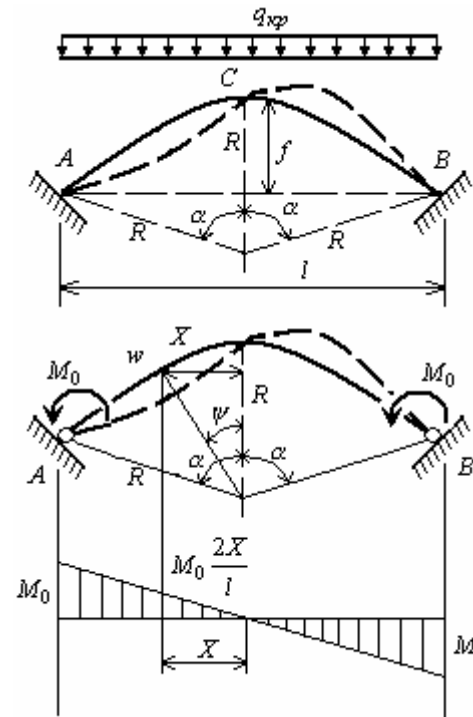


Рис. 55

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{R^2}{EJ} \left( qRw - M_0 \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right);$$

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \left( 1 + \frac{R^3 q}{EJ} \right) = \frac{M_0 R^2 \sin \varphi}{EJ \sin \alpha}.$$

Обозначим:  $n = \sqrt{1 + \frac{R^3 q}{EJ}}$  и  $C = \frac{M_0 R^2}{EJ \sin \alpha}$ .

Тогда  $\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + n^2 w = C \sin \varphi$  (\*);

$$w = w_1 + w_2,$$

где  $w_1$  - общее решение однородного уравнения -  $w'' + n^2 w = 0$

$$w_1 = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi.$$

Частное решение имеем в виде:

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi \\ w_2'' &= C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi \\ w_2'' &= -C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

Подставим в дифференциальное уравнение (\*):

$$-C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi + n^2 C_1 \sin \varphi + n^2 C_2 \cos \varphi = C \sin \varphi$$

$$\begin{cases} -C_1 + n^2 C_1 - C = 0 \\ -C_2 + n^2 C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_2(n^2 - 1) = 0$$

т.к.  $(n^2 - 1) \neq 0$ , то  $C_2 = 0$

$$C_1(n^2 - 1) = C \text{ и } C_1 = \frac{C}{n^2 - 1},$$

Получили полное решение:

$$w = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \varphi$$

В отличие от двухшарнирной арки необходимо три граничных условия для определения производных постоянных: А, В и С. Дополнительным граничным условием будет равенство нулю угла поворота в заделке.

При  $\varphi = 0$   $w = 0$ .

При  $\varphi = \alpha$   $w = 0$   $w' = 0$ .

Первое условие дает  $A = 0$  и два других

$$\begin{cases} B \sin n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \alpha = 0 \\ Bn \cos n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin n\alpha, & \frac{1}{n^2 - 1} \sin \alpha \\ n \cos n\alpha, & \frac{1}{n^2 - 1} \cos \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (**),$$

откуда  $\sin n\alpha \cos \alpha - n \cos n\alpha \sin \alpha = 0$  и  $tqn\alpha \cdot ctq\alpha = n$ .

Это уравнение дает возможность определить (n), а следовательно, и критическую нагрузку.

Из формулы  $n = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EJ}}$  получим:

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} (n^2 - 1)$$

Значения (n) приведены в таблице при разных  $\alpha$ .

Характеристическое уравнение решается путем подбора. Возьмем арку с центральным углом  $2\alpha = 60^\circ$ . Тогда  $ctq\alpha = ctq30^\circ = 1,73$  и уравнение (\*\*) приобретает вид:

$$n = 1,73tqn\alpha \quad (***)$$

Обозначив правую часть полученного уравнения через А и давая (n) различные значения, получаем:

	$n = 7'$	$A = 1,73tq210^\circ = 1,73 \cdot 0,978 = 1,0$
	$n = 8$	$A = 1,73tq210^\circ = 1,73 \cdot 1,73 = 3,0$
При	$n = 9$	$A = tq\left(\frac{3}{2}\pi\right)1,73 = \infty$
	$n = 8,625$	$A = 1,73tq258^\circ 45' = 8,7$

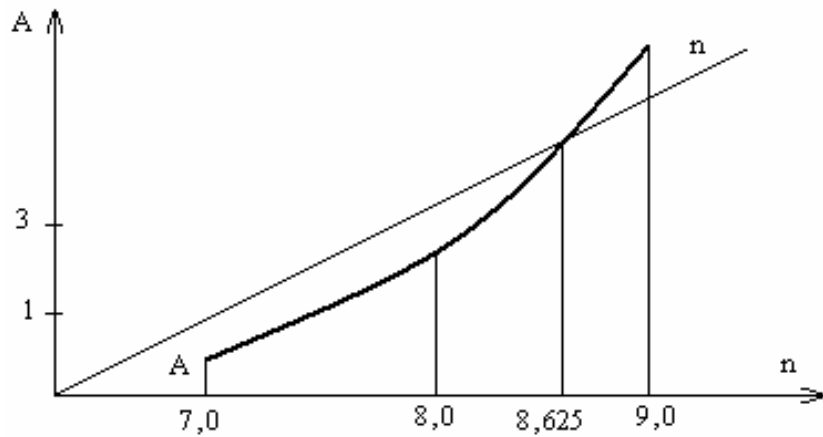


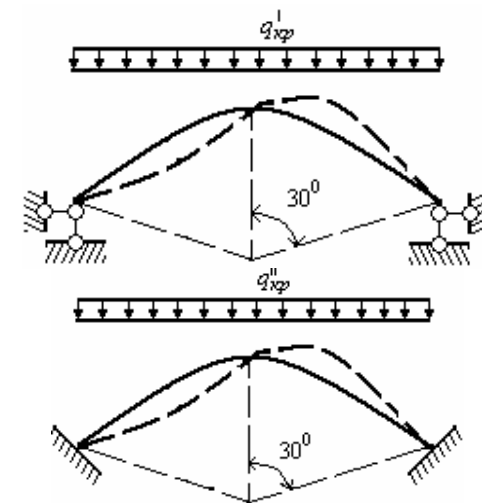
Рис. 56

На рисунке 56 представлен график решения уравнения (\*\*\*)

Приняв  $n = 8,625$ , получаем

$$q_{кр} = (8,625^2 - 1) \frac{EJ}{R^3} = 73,3 \frac{EJ}{R^3}.$$

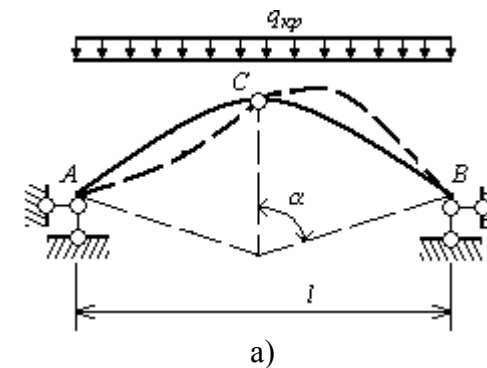
Сравнивая результат с предыдущим примером, видим, что при  $2\alpha = 60^\circ$  бесшарнирная арка оказалась в 2,09 раза устойчивее двухшарнирной.

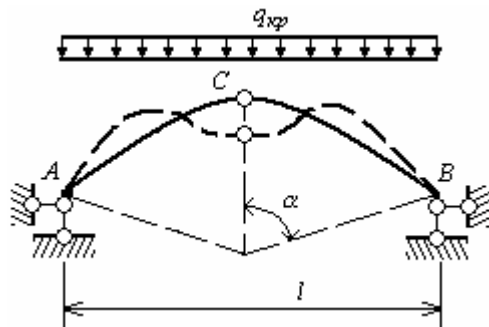


$$q'' = 2,09q'_{кр}$$

Рис. 57

#### 16.4. Устойчивость трехшарнирной арки





б)  
Рис. 58

На рисунке 58 (а, б) показаны пунктиром два возможных вида потери устойчивости. В первом случае характер изгиба совпадает с типовым в двухшарнирной арке, поэтому критическая нагрузка определяется по формуле:

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right).$$

Во втором случае имеет место симметричная форма изгиба с вертикальным перемещением шарнира С. Опыты показали, что для круговой трехшарнирной арки наименьшей критической нагрузке соответствует симметричная форма изгиба.

Наименьшая критическая нагрузка определяется по формуле (акад. Динник):

$$q_{кр} = \frac{4\nu^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \frac{EJ}{R^3},$$

где  $\nu$  - определяется из  $\frac{tq\nu - \nu}{\nu^3} = \frac{4(tq\alpha - \alpha)}{\alpha^3}$  или

$$k = \frac{4\nu^2 - \alpha^2}{\alpha^2} - \text{коэффициент устойчивости.}$$

## 16.5. Одношарнирная балка

Меньшая критическая нагрузка получается при симметричной форме изгиба, как в трехшарнирной арке.

Критическая нагрузка вычисляется так же, как и трехшарнирной арки.

Во всех рассмотренных выше случаях критическая нагрузка для круговых арок может быть выражена формулой:

$$q_{кр} = k \frac{EJ}{R^3},$$

а нормальная сила:  $N = k \frac{EJ}{R^2}.$

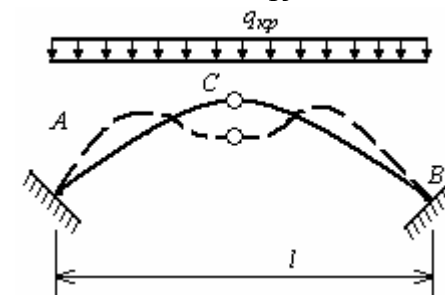


Рис. 59

значения коэффициента устойчивости k в зависимости от  $\alpha$  приведены в таблице:

Таблица

$2\alpha$	Бесшарнирная арка $k = n^2 - 1$	Двухшарнирная арка $k = \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1$	Трехшарнирная арка $k = \frac{4\nu^2 - \alpha^2}{\alpha^2}$	Одношарнирная арка $k = \frac{4\nu^2 - \alpha^2}{\alpha^2}$

30	294	143	108	162
60	73,3	35	27,6	40,2
90	32,4	15,0	12,0	17,9
120	18,1	8	6,75	10,2
150	-	4,76	4,32	-
180	8	3,0	3,3	4,61

### 16.6. Устойчивость параболических арок

Пример (рис.60)

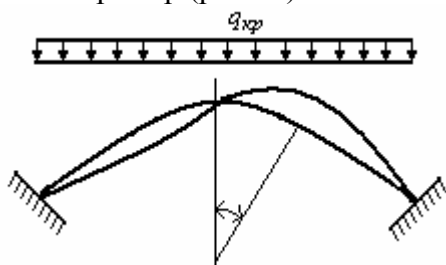


Рис. 60

Для параболической арки, несущей вертикальную равномерно распределенную нагрузку, так же как и для круговой арки с радиальной нагрузкой, потери устойчивости характеризуются появлением изгиба, причем наиболее

опасной формой потери устойчивости для двухшарнирной и бесшарнирной арки будет кососимметричная форма.

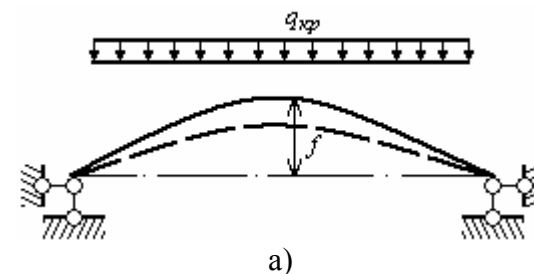
Академиком А.Н. Динником исследовалась устойчивость параболических арок постоянного и переменного сечения при различных закреплениях концов. Путем интегрирования (довольно сложного дифференциального уравнения третьего порядка) вычислены коэффициенты устойчивости

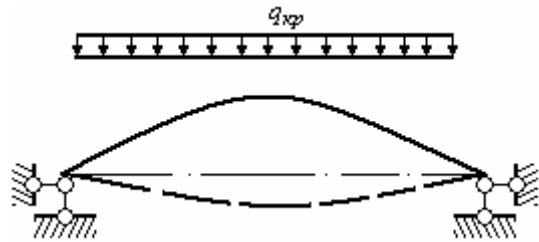
для различных случаев и  $q_{кр} = k \frac{EJ}{l^2}$ , где  $k$  – коэффициент устойчивости.

$\frac{f}{l}$	Бесшарнирная арка	Двухшарнирная арка	Трехшарнирная арка	
			Симметричная форма	Кососимметричная форма
0,1	60,7	28,5	22,5	28,5
0,2	101,0	45,4	39,6	45,4
0,3	115,0	46,5	47,3	46,5
0,4	111,0	43,9	49,2	43,9
0,5	97,4	38,4	-	38,4
0,6	83,8	30,5	38,0	30,5
0,8	59,1	20,0	28,8	20,0
1,0	43,7	14,7	22,1	14,1

Как видно из таблицы, симметричная форма потери устойчивости является основной для трехшарнирной арки до  $\frac{f}{l} \approx 0,3$ .

### 16.7. Устойчивость весьма пологих арок





б)  
Рис. 61

В предыдущих случаях рассматривались арки с условием нерастяжимости её оси. Условие нерастяжимости приводило к тому, что в двухшарнирной и бесшарнирной арке наибольшее опасной формой потери устойчивости оказывалась кососимметричная форма. В весьма пологих арках при малой стреле подъема нельзя пренебрегать изменениями длины оси арки при её обжатии. В этом случае арка потеряет несущую способность по кососимметричной кривой с одной полуволной причем при одних геометрических характеристиках кривизна будет оставаться того же знака, что и в недеформированном состоянии (см. рис. 61,а, пунктирная кривая), при других геометрических характеристиках в критическом состоянии произойдет так называемое прощелкивание, арка выпучится в другую сторону и из сжатой станет растянутой (рис. 61,б).

Решение задачи о потере устойчивости весьма пологих арок с учетом изменения длины осевой линии было дано С.П. Тимошенко, который рассмотрел арку с шарнирно-опертыми концами, очерченную по синусоиде, по уравнению:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

С.П. Тимошенко вывел формулу для критической нагрузки, при которой арка будет выпучиваться вниз

$$\nu = 1 + \sqrt{\frac{4(1-m)^3}{27m^2}} \quad (*)$$

где  $m = \frac{4l}{Ff^2} \quad (**);$

$\nu$  – отношение прогиба посередине пролета шарнирно-опертой балки при заданной нагрузке к стреле подъема арки; например, при равномерно- распределенной нагрузке  $q$

$$\nu = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{1}{f} \quad (***)$$

при сосредоточенном грузе посередине пролета

$$\nu = \frac{Fl^3}{48EJ} \frac{1}{f} \quad (****).$$

Формула (\*) действительна при  $m \ll 1$ .  $F$  - площадь поперечного сечения арки.

Нахождение критической нагрузки производится следующим образом:

- 1) по формуле (\*\*) находят величину ( $m$ );
- 2) затем, приравнявая выражения (\*) и (\*\*\*) или (\*\*\*\*), в зависимости от заданной нагрузки находят  $q_{кр}$ . Например, для равномерно распределенной нагрузки:

$$1 + \sqrt{\frac{4(1-m)^3}{27m^2}} = \frac{5}{384} \frac{q_{кр} l^4}{EJ} \frac{1}{f}.$$

При  $m \geq 1$  имеется только одна форма равновесия, которая будет устойчивой.

## 17. Устойчивость плоской формы изгиба

### 17.1. Устойчивость полосы

Рассмотрим стержень или балку прямоугольного сечения, у которой одна из главных жесткостей мала сравнительно с другой. Такой стержень будем называть полосой. Изгибая полосу в плоскости наибольшей жесткости можно достигнуть предела, при котором плоская форма изгиба перестает быть устойчивой. Ось полосы искривляется в плоскости наименьшей жесткости, причем отдельные поперечные сечения полосы поворачиваются. Вместо плоского изгиба мы имеем изгиб по линии двоякой кривизны, сопровождаемой кручением. Явление это легче наблюдать при изгибе широкой и тонкой линейки. Изгибая её в плоскости наибольшей жесткости, можно заметить ту предельную нагрузку, при которой плоская форма изгиба перестает быть устойчивой.

Основное дифференциальное уравнение для решения вопроса об устойчивости плоской формы изгиба можно представить в таком виде:

$$EJ_1 GJ_p \varphi'' + M^2 \varphi = 0, \quad (A)$$

где  $EJ_1$  - наибольшая жесткость при изгибе;

$GJ_p$  - жесткость при кручении;

$\varphi$  - угол поворота какого - либо сечения полосы при выходе из плоскости;

$M$  – изгибающий момент.

Для нахождения критической силы  $P_{кр}$ , как и при продольном изгибе, надо проинтегрировать составленное уравнение и определить её из граничных условий.

### 17.2. Чистый изгиб полосы

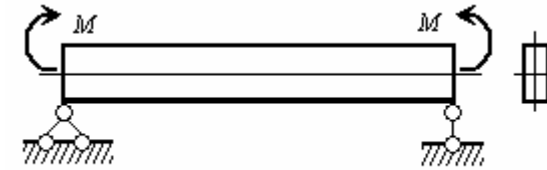


Рис. 62

Пусть полоса изгибается моментами, приложенными по концам и действующими в её средней плоскости.

Так как момент вдоль всей полосы остается постоянным, то уравнение (A) интегрируется в тригонометрических функциях.

Если концы полосы оперты, то:

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{EJ_2 \cdot GJ_p}}{l},$$

если зажаты, то:

$$M_{кр} = \frac{2\pi \sqrt{EJ_2 \cdot GJ_p}}{l}.$$

Следовательно, критический момент ( $M_{кр}$ ) зависит не от большей жесткости полосы ( $EJ$ ), а от наименьшей ( $EJ_2$ ) жесткости и жесткости при кручении ( $GJ_p$ ).

### 17.3. Сосредоточенная сила

1) Если на балку–полосу действует одна или несколько сосредоточенных сил, то критическая сила может быть выражена формулой:

$$P_{кр} = \frac{k \sqrt{EJ_2 \cdot GJ_p}}{l^2} \quad (B)$$



где  $k$  – коэффициент устойчивости, зависит от расположения сил и от способа закрепления конца полосы.

2) Если один конец полосы зажат (зашемлен), а другой свободен и к нему приложена сосредоточенная сила  $P$ , то критическое значение её равно:

$$P_{кр} = \frac{2\alpha \sqrt{EJ_2 GJ_p}}{l^2},$$

где:  $\alpha$  - корень функции Бесселя  $J_{-1/4}$ .

Наименьший корень этой функции равен 2,007. Отсюда

$$P_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{EJ_2 GJ_p}}{l^2}.$$

3) Балка-полоса на двух опорах, сила  $P$  приложена посередине пролета. Если концы балки оперты, то критическая сила определяется по выражению:

$$P_{кр} = 16,94 \frac{\sqrt{GJ_2 GJ_p}}{l^2}.$$

Если сила  $P$  приложена не посередине пролета, а на расстоянии ( $X$ ) от одной из опор, то критическая сила выражается той же формулой (В), причем  $k$  – определяется из уравнения, составленного из формулы Бесселя порядка  $\pm \frac{1}{4}$  и  $\pm \frac{3}{4}$ . В таблице даны значения  $k$  для балки с обоими опертыми концами.

$\frac{b}{l}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$k$	16,94	17,82	21,01	29,11	56,01

#### 17.4. Равномерно – распределенная нагрузка

Уравнение изгиба интегрируется в формулах Бесселя порядка  $\pm \frac{1}{6}$ . Если правый конец балки зажат, а левый свободен и на балку – полосу действует равномерно-распределенная нагрузка ( $q$ ), то критическое значение её равно

$$Q_{кр} = ql = \frac{k \sqrt{EJ_2 GJ_p}}{l^2},$$

где  $k$  – коэффициент устойчивости для первых двух критических нагрузок:  $k_1 = 12,85$ ,  $k_2 = 38,56$ .

Для равномерно-распределенной нагрузки балки с обоими опертыми концами  $k = 28,3$ .

#### 17.5. Устойчивость высокой двутавровой балки

Вопрос об устойчивости высоких двутавровых балок при плоской форме изгиба имеет большое практическое значение вследствие того, что такие балки очень часто встречаются на практике.

Стремление получить возможно большую экономию материала и желание достигнуть возможно большей жесткости в плоскости действия сил заставляет конструктора увеличивать высоту балки. Ширина поясов при этом часто по конструктивным соображениям не может быть значительно увеличена. В результате получается сечение, один из главных моментов инерции которого во много раз больше другого.

Балка в направлении, перпендикулярном к действию сил, имеет недостаточную жесткость и может оказаться неустойчивой. Вообще проверять балку на устойчивость при

$m^2$	0,4	4	8	16	32	64	128	360
$k$	143	53,0	42,6	36,3	32,3	30,5	29,0	28,6
$\sigma'_{кр}$	568	663	752	905	1150	1530	2080	3400
$\sigma''_{кр}$	367	454	538	684	923	1290	1840	3160
$\sigma_{кр}$	879	967	1050	1200	1430	1810	2350	3670

плоской форме изгиба приходится в тех случаях, когда один из моментов инерции сечения балки значительно больше другого. Это мы имеем в высоких двутавровых балках.

Итак, например, для прокатной балки №50 по нормальномu сортаменту отношение моментов инерции в округленных числах равно 28. Для клееной балки это отношение больше.

Задача об устойчивости плоской формы изгиба высоких двутавровых балок была решена С.П. Тимошенко, им получена критическая сила

$$P_{кр} = \frac{k\sqrt{EJ_2GJ_p}}{l^2}.$$

Он же разобрал ряд случаев для различного рода нагрузок и различного рода закрепления и составил таблицу значений  $k$  для балки с опертыми концами и силой  $P$ , приложенной посередине.

Коэффициент устойчивости,  $k$  зависит ещё и от вспомогательных величин:

$$m^2 = \frac{2Cl^2}{Dh^2}; \quad \Phi = \frac{B_2}{B_1} \frac{h^2}{l^2},$$

где  $C = GJ_p$ ;

$D$  - наибольшая жесткость при изгибе одной полки, её можно принимать равной  $\frac{B_2}{B_1}$ ;

$B_2 = EJ_2$  (наименьшая жесткость при изгибе);

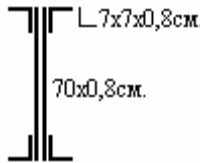
$B_1 = EJ_1$  (наибольшая жесткость при изгибе);

$h$  - высота балки.

Критические напряжения  $\sigma$  вычислены в предположении  $\Phi=0,0001$ ; для балок с другими значениями  $\Phi$   $\sigma_k$  найдется умножением табличных данных на  $10000\Phi$ :

$$\sigma_k = \frac{Mh}{2J_1} = \frac{FlEh}{8B_1} = \frac{kmE}{16} \frac{B_2}{B_1} \frac{h^2}{l^2};$$

В третьей строке даны критические напряжения в предположении, что  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$  и точка



приложения силы  $F$  находится на оси балки. Но силы большей частью бывают приложены к верхней грани балки. Ясно, что при повышении точки приложения силы  $P$  устойчивость балки должна уменьшиться.  $\sigma''_{кр}$  даны для случая, когда точка приложения силы  $F$  совпадает с верхней гранью балки, т. е. лежит на расстоянии  $\frac{h}{2}$  от нейтральной оси.

$\sigma_{кр}$  - когда сила приложения совпадает с нижней гранью.

При равномерно распределенной нагрузке

$$Q_{кр} = q_{кр}l = \frac{k\sqrt{B_1C}}{l^2}.$$

Пример:

$l = 530 \text{ см}$ . Концы балки оперты.

Р посередине.

Решение:

По таблицам:

$$B_1 = 59100E, \quad B_2 = 446E$$

Жесткость полки:

$$D = \frac{1}{2}B_2 = 223E;$$

$$F = 98,24; \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad G = 780000 \text{ кг/см}^2.$$

Жесткость кручения по приближенным формулам Сен-

Венана:

$$C = \frac{F^4 G}{40J_p} = \frac{98,24^4 \cdot 780000}{40(59100 + 446)} = 30,6 \cdot 10^6;$$

$$m^2 = \frac{2Cl^2}{Dh^2} = \frac{2 \cdot 30,6 \cdot 10^6 \cdot 530 \cdot 530}{223 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 490} = 7,9 \approx 8;$$

$$\Phi = \frac{B_2 h^2}{B_1 l^2} = \frac{446E}{59100E} \cdot \frac{4900}{530 \cdot 530} = \frac{1}{7580} = 1,31 \cdot 10^{-4};$$

Для

$$m^2 = 8, \quad \Phi = \frac{1}{10000}; \quad \sigma'_{кр} = 910 \cdot 1,31 = 1190 \text{ кг/см}^2;$$
$$k = 25,6; \quad F_{кр} = \frac{k\sqrt{B_2 C}}{l^2} = 15200 \text{ кгс}.$$

Если сила Р приложена к верхнему канту, то

$$\sigma''_{кр} = 600 \text{ кг/см}^2,$$

получим:

$m^2$	0,4	4	8	16	32	64	96	360
$k$	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,9	17,2
$\sigma'_{кр}$	680	800	910	1090	1380	1830	2190	3860
$\sigma''_{кр}$	405	505	600	770	1050	1490	1840	3500
$\sigma_{кр}$	1150	1250	1350	1520	1860	2240	1508	4240

$$\sigma'_{кр} = 1,31 \cdot 600 = 786 \text{ кг/см}^2,$$

этому соответствует:

$$P_{кр} = 10000 \text{ кг}.$$

## Приложение

Значение функций метода перемещений для сжато изогнутых стержней:

$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 tq\nu}{3(tq\nu - \nu)}; \quad \varphi_2(\nu) = \frac{\nu(tq\nu - \nu)}{8tq\nu(tq\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})};$$

$$\varphi_3(\nu) = \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu(tq\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})}; \quad \varphi_4(\nu) = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right);$$

$$\eta_1(\nu) = \frac{\nu^3}{3(tq\nu - \nu)}; \quad h_2(\nu) = h_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \quad \nu = l\sqrt{\frac{N}{EJ}}$$

Таблица №1

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$h_1(\nu)$	$h_2(\nu)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,93329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675

2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679

5,5	1,5455	-1,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2π	0,0000	-∞	+∞	0,0000	-13,033	-3,2898

Из «Руководства к практическим занятиям по курсу строительной механики» под ред. Г. К. Клейна и др. [5].

Значение функций метода сил

$$\Theta_1(v) = \frac{3}{v^2} \left( \frac{tqv}{2} - 1 \right); \quad \Theta_2(v) = \frac{3}{v^2} \left( \frac{tqv}{v} + vtqv - \frac{2}{\cos v} + 1 \right);$$

$$\Theta_3(v) = \frac{6}{v^2} \left( \frac{1}{\cos v} - \frac{tqv}{v} \right); \quad \Theta_4(v) = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{tqv^2} \right);$$

$$\Theta_5(v) = \frac{6}{v} \left( \frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right);$$

Таблица №2

$v$	$\Theta_1(v)$	$\Theta_2(v)$	$\Theta_3(v)$	$\Theta_4(v)$	$\Theta_5(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

0,10					
0,20	1,0163	1,0065	1,0178	1,0027	1,0042
0,30					
0,40	1,0683	1,0252	1,0768	1,0107	1,0188
0,50					
0,60	1,1686	1,0622	1,1901	1,0249	1,0437
0,70					
0,80	1,3456	1,1256	1,3900	1,0455	1,0800
0,90					
1,00	1,6722	1,2395	1,7605	1,0737	1,1304
1,10	1,9491	1,3344	2,0750	1,0912	1,1617
1,20	2,3822	1,4806	2,5677	1,1114	1,1979
1,30	3,1435	1,7342	3,4347	1,1345	1,2396
1,40	4,8082	2,2832	5,3332	1,1610	1,2878
1,50	11,2013	4,3740	12,6292	1,1915	1,3534
$\frac{\pi}{2}$	∞	∞	∞	1,2159	1,3880
1,60					
1,70	-26,2445	-7,8214	-30,1204	1,2266	1,4078
1,80	-5,7378	-1,1299	-6,7141	1,2673	1,4830
1,90	-3,1308	-0,8271	-3,7410	1,3147	1,5710
	-2,1133	+0,0701	-2,5805	1,3704	1,6750
2,00					
2,10	-1,5694	-0,2575	-1,9658	1,4365	1,7993
2,20	-1,2342	0,3788	-1,5872	1,5158	1,9494
2,30	-1,0069	0,4659	-1,3323	1,6124	2,1336
2,40	-0,8431	0,5336	-1,1504	1,7325	2,3614
2,50	-0,7196	0,5897	-1,0151	1,8854	2,6596
2,60	-0,6234	0,6385	-0,9114	2,0864	3,0502
2,70	-0,5465	0,6828	-0,8304	2,3618	3,5890
2,80	-0,4836	0,7246	-0,7663	2,7619	4,3766
2,90	-0,4313	0,7654	-0,7151	3,3963	5,6315
	-0,3870	0,8063	-0,6742	4,5550	7,9343
3,00					
	-0,3492	0,8483	-0,6417	7,3486	13,5057

3,10	-0,3165	0,8926	-0,6165	23,5659	45,9234
$\pi$	-0,3040	0,9119	-0,6079	$\infty$	$\infty$
3,20	-0,2876	0,9401	-0,5976	-15,7398	-32,7063
3,30	-0,2621	0,9920	-0,5846	-5,4154	-12,0770
3,40	-0,2394	1,0499	-0,5772	-3,0787	-7,4248
3,50	-0,2187	1,1152	-0,5751	-2,0433	-5,3769
3,60	-0,1997	1,1907	-0,5797	-1,4572	-4,2292
3,70	-0,1821	1,2795	-0,5908	-1,0787	-3,4990
3,80	-0,1654	1,3861	-0,6099	-0,8128	-2,9961
3,90	-0,1493	1,5174	-0,6392	-0,6147	-2,6314
4,00	-0,1332	1,6838	-0,6823	-0,4603	-2,3570
4,10	-0,1165	1,9030	-0,7449	-0,3355	-2,1454
4,20	-0,0981	2,2057	-0,8378	-0,2317	-1,9792
4,30	-0,0760	2,6529	-0,9821	-0,1430	-1,8475
4,40	-0,0459	3,3836	-1,2265	-0,0652	-1,7429
4,50	+0,0045	4,7980	-1,7110	+0,0044	-1,6603
4,60	0,1314	8,7218	-3,0745	0,0682	-1,5962
4,70	2,1964	75,9101	-26,5889	0,1279	-1,5483
$3/2\pi$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0,1351	-1,5434
4,80	-0,4390	-10,2705	+3,5933	0,1851	-1,5152
4,90	-0,2593	-4,5743	1,6085	0,2412	-1,4963
5,00	-0,2011	-2,8355	1,0083	0,2975	-1,4914
5,10	-0,1707	-1,9912	0,7211	0,3555	-1,5014
5,20	-0,1512	-1,4908	0,5541	0,4169	-1,5280
5,30	-0,1370	-1,1585	0,4458	0,4838	-1,5738
5,40	-0,1261	-0,9209	0,3706	0,5592	-1,6436
5,50	-0,1171	-0,7417	0,3158	0,6470	-1,7446
5,60	-0,1096	-0,6010	0,2745	0,7538	-1,8886
5,70	-0,1030	-0,4868	0,2426	0,8901	-2,0961
5,80	-0,0972	-0,3917	0,2176	1,0750	-2,4050
5,90	-0,0921	-0,3105	0,1976	1,3476	-2,8924
6,00	-0,0874	-0,2398	0,1817	1,8015	-3,7455

6,10	-0,0831	-0,1769	0,1689	2,7289	-5,5609
6,20	-0,0791	-0,1200	0,1588	5,8812	-11,8030
$2\pi$	-0,0760	-0,0760	0,1520	$\infty$	$\infty$

Из «Руководства к практическим занятиям по курсу строительной механики» под ред. Г. К. Клейна и др. [5].

### Список использованной литературы

1. Прокофьев И.П. Смирнов А.Ф. Теория сооружений. –М.; Трансжелдориздат, 1948.
2. Рабинович И.М. Курс строительной механики Т. 2. - М., 1954.
3. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. –М.; Государственное Издательство по строительству и архитектуре. 1956.
4. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972.
5. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики – М., Высшая школа. 1972.
6. Снитко Н.К. Устойчивость стержневых систем –М.: государственное издательство по строительству и архитектуре, 1956.
7. Динник А.Н. Избранные труды Т.1. Киев, Изд-во АН УССР. 1952.