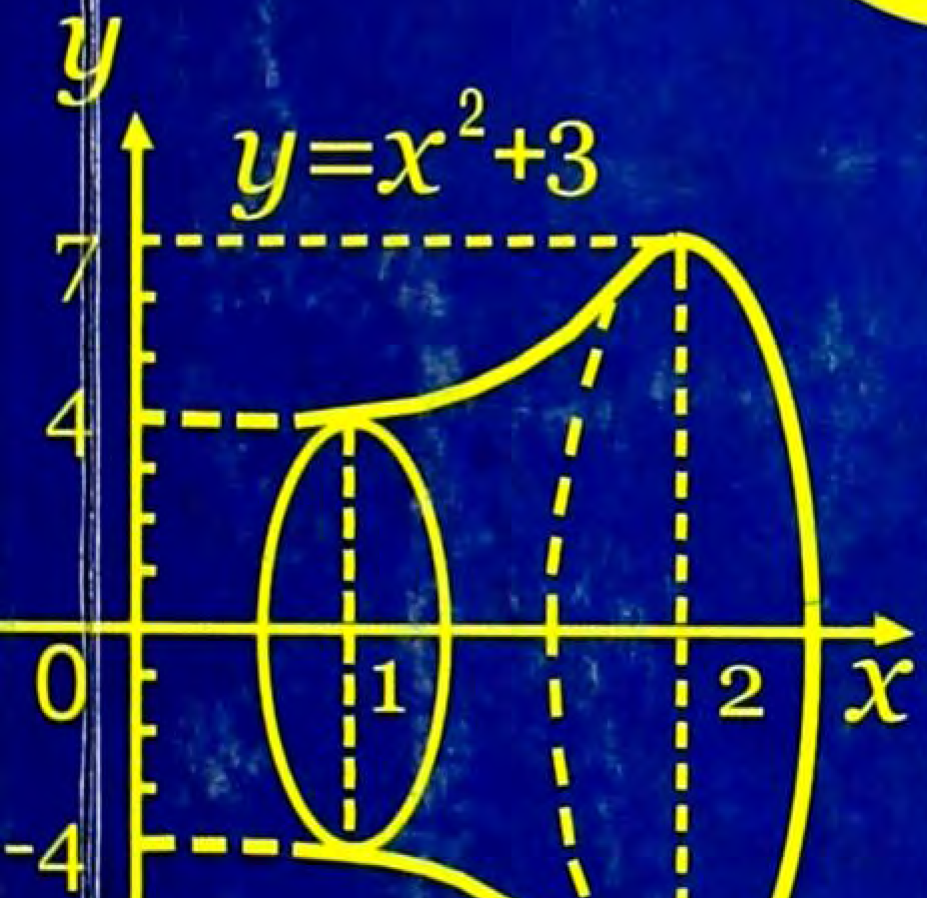
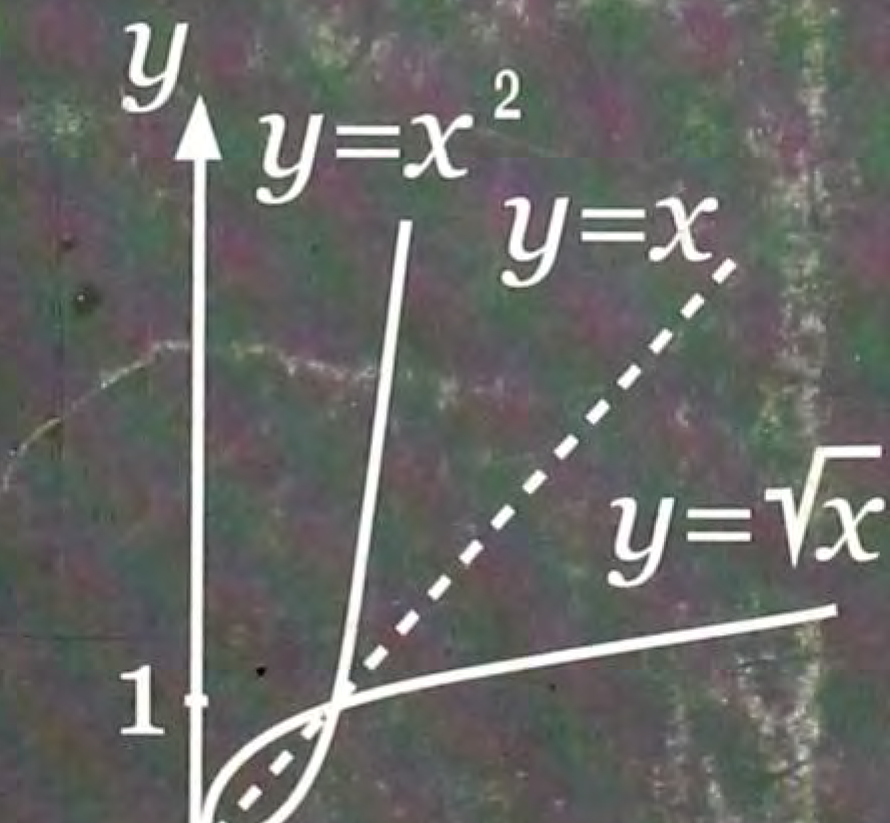
М. Иманалиев, А. Асанов,
К. Жусупов, С. Искандаров

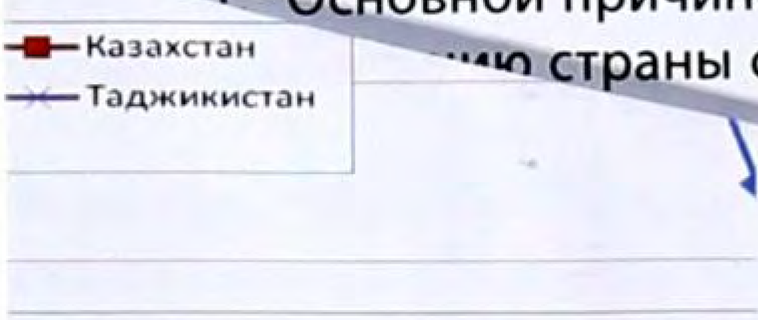
АЛГЕБРА
ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

11





г.[3] Основной причиной негативных трен
ию страны со стороны вн



ациональный статистический комитет КР

на ростом частного потребления (см. рису-
ьно положительную динамику (см. рисунок
государственное) превысило ВВП, а потре-
центов. В 2008 г. в структуре конечного по-
расходы на продукты питания, 29,6 процен-
цента – расходы на услуги. Данная динамика
твует о большом объеме денежных перево-

М. Иманалиев, А. Асанов,
К. Жусупов, С. Искандаров

АЛГЕБРА

ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

11

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
11-классы үчүн окуу китеби

*Кыргыз Республикасынын Билим берүү
жана илим министрлиги бекиткен*

БИШКЕК – 2009

УДК 512
ББК 22.14
А 14

Алгебра жана анализдин башталышы: Жалпы билим
А 14 берүүчү орто мектептин 11-кл. үчүн окуу китеби (М. Иманалиев, А. Асанов, К. Жусупов, С. Искандаров. – Б.: Мамл. тил ж-а энциклопедия борбору, 2009. – 288 б.

ISBN 978–9967–14–061–5

«Алгебра жана анализдин башталышы» окуу китеби жалпы билим берүүчү орто мектептердин 11-классы үчүн математика курсунун программасынын негизинде жана окуучулардын математикалык даярдыгына коюлуучу талаптар, окутуунун мазмуну, тематикалык пландаштыруу, предмет аралык байланыштарды эске алуу менен түзүлдү. Мурдагы чыккан окуу китептерден айырмасы – 10-класстын программасын бөлүп, 11-класс – бүтүрүүчү класс үчүн гана даярдалган алгачкы окуу курал. Ошондой эле темаларды бышыктоодо колдонулган көнүгүүлөр окуучулардын деңгээлдерине жараша, кенен жана туура тандалып алынган. Татаал көнүгүүлөр үчүн текстеги чыгарылган мисалдардан сырткары атайын көрсөтмөлөр (кантип чыгаруу керек) берилген. Китептеги ар бир тема теориялык материалдар менен катар айрым мисалдардын чыгарылышы да берилип, бөлүмдөр тест, оозеки көнүгүүлөр жана «тарыхый маалыматтар» менен толукталган.

$А \frac{4306020503}{М\ 454\ (11) - 09}$

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978–9967–14–061–5

Билим инсанга момундук берет. Момундук аркылуу инсан оң сапаттарга ээ болот. Ал сапаттар аркылуу байлык келет. Байлыкты туура жана кайрымдуулукка жумшоо ар бир инсанга бакыт алып келет.

(Байыркы Веда китебинен)

КИРИШ СӨЗ

Бул окуу китеби Кыргыз Республикасынын билим берүү академиясында иштелип чыккан жалпы билим берүүчү орто мектептердин 11-классынын окуу программасына ылайык жазылды.

Китепти жазууда мурдагы класстарда өтүлгөн айрым материалдарга кайталоо жүргүзүлүп, кээ бир материалдарга мурдагы класстарда азыраак көңүл бөлүнгөнү, ошондой эле 11-класс – бүтүрүүчү класс экени да эске алынды.

Китепте ар кандай деңгээлдеги материалдар бар. Демек, ар бир окуучу өзүнө керектүү материалды таба аларына ишенебиз жана куру дегенде материалдардын эң жеңилин билүү керектүү экенин белгилешибиз керек.

Бул окуу куралында көп мисалдар чыгарылышы менен берилип, чыгаруу ыкмалары (жолдору) пайдаланылды. Башка белгилүү китептерден бир айырмасы ушул десек ашыкча болбостур. Көнүгүүлөрдүн көбү ойлонууну талап кылат. Китептин бир максаты – ойлонууга, кырдаалга анализ жасоого, туура чечимге келүүгө жардам берүү. Теориялык материалдар жана көнүгүүлөр «жеңил, орто, татаал» принципте жазылды. Китепти кунт коюп окуган окуучу сунушталган ар бир көнүгүүнү аткара алат, анткени окшош эсеп, маселелердин чыгарылыштары текстте бар жана татаалыраактарына көрсөтмө берилди. Тарыхый маалыматтар «Алгебра-9»дун «Тарыхый маалыматтарынын» уландысы сыяктуу, толукталып жазылды жана бул маалыматтар дагы кошумчаланууга муктаж экенин эскерте кетели.

Кымбаттуу бүтүрүүчүлөр, эгерде элибиздин, үй-бүлөбүздүн жана өзүңөрдүн келечегиңерди ойлосоңор, анда адамдын акыл-эсин төмөндөтүп, денсоолугун начарлатып, келечегин жок кылып, билимдин таасирин жокко чыгара турган алкогольдон, тамекиден жана наркотиктен алыс болушуңарды суранабыз.

Турмушта жогорку ийгиликтерге жетүүдө терең билим, туура аракет жана чың ден соолук негизги ролду ойнойт. Терең билим, тынымсыз аракет жана чың ден соолуктун фундаменти – таза аба, таза суу, өз убагында туура тамактануу, чөйрөдөгүлөр менен жакшы ма-функциясы $(0;\infty)$ аралыгында гана баштапкы функция болот. Анткени, $f(x)=\sqrt{x}$ жана $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ функцияларынын аныкталуу облустары $D(f)=D(F)=[0;\infty)$ жана ар кандай $x\in[0;\infty)$ үчүн

$$F'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{x}=f(x).$$

3-м и с а л. Ар кандай C – туруктуу саны үчүн $F(x)=x^{-2}+C=\frac{1}{x^2}+C$ функциясы $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ функциясынын $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ облусунда баштапкы функциясы болот. Себеби

$$F'(x)=(x^{-2}+C)'=(x^{-2})'+(C)'=-2x^{-3}=f(x).$$

4-м и с а л. $F(x)=tgx$ функциясы $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ функциясынын $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болот. Себеби

$$F'(x)=(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=f(x),\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

5-м и с а л. $F(x)=\sin(\ln x)$ функциясы $f(x)=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ функциясынын $(0;\infty)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болот. Себеби $F'(x)=(\sin(\ln x))'=\cos(\ln x))\,(\ln x)'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)=f(x),\ x\in(0;\infty).$

Көнүгүүлөр

1. F функциясы берилген аралыктарда f функциясы үчүн баштапкы функция экендигин далилдегиле.

а) $F(x)=x^7$,	$f(x)=7x^6$,	$x\in(-\infty;\infty)$;
б) $F(x)=x^{-4}$,	$f(x)=-4x^{-5}$,	$x\in(0;\infty)$;
в) $F(x)=e^x$,	$f(x)=e^x$,	$x\in(-\infty;\infty)$;
г) $F(x)=\mathrm{ctg}x$,	$f(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$,	$x\in(0;\pi)$;
д) $F(x)=9^x$,	$f(x)=9^x\ln 9$,	$x\in(-\infty;\infty)$;
е) $F(x)=7\sin x+\ln x+9$,	$f(x)=7\cos x+\frac{1}{x}$,	$x\in(0;\infty)$.

2. Көрсөтүлгөн аралыкта f функциясы үчүн F функциясы баштапкы функция боло алабы?

а) $F(x)=5+\cos x$, $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=7-2x^9$, $f(x)=-18x^8$, $x\in(-\infty;\infty)$;

в) $F(x)=3^x+x$, $f(x)=3^x\ln 3+1$, $x\in(-\infty;\infty)$;

г) $F(x)=x^{-3}+5$, $f(x)=\dfrac{1}{3x^4}$, $x\in(0;\infty)$.

3. $R=(-\infty;\infty)$ аралыгында f функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин тапкыла.

а) $f(x)=4{,}5$; *б)* $f(x)=1-\cos x$; *в)* $f(x)=4x$;

г) $f(x)=\sin x+2$; *д)* $f(x)=e^x$; *е)* $f(x)=-x+x^6$;

ж) $f(x)=4^x$; *з)* $f(x)=-5-7^x$.

4. Көрсөтүлгөн аралыкта F функциясы f функциясы үчүн баштапкы функция экендигин далилдегиле.

а) $F(x)=\cos^2 x$, $f(x)=-\sin 2x$, $x\in R$;

б) $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+5^x$, $f(x)=\cos 2x+5^x\ln 5$, $x\in R$;

в) $F(x)=5+3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$, $f(x)=-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$, $x\in(-\pi;\pi)$;

г) $F(x)=5\cos 7x-x^2$, $f(x)=-35\sin 7x-2x$, $x\in R$.

5. Көрсөтүлгөн аралыкта f функциясы үчүн F баштапкы функция боло алабы?

а) $F(x)=4x+2\sin\dfrac{x}{2}$, $f(x)=4+\cos\dfrac{x}{2}$, $x\in R$;

б) $F(x)=\sqrt{9-x^2}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $x\in(-3;3)$;

в) $F(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $f(x)=-\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$, $x\in(1;\infty)$;

г) $F(x)=10x^2\sqrt{x}$, $f(x)=25x\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$.

6. R де f функциясы үчүн анын эки баштапкы функциясын тапкыла.

а) $f(x)= x^2+x+3$; б) $f(x)= (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2$;

в) $f(x)= \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x}$; г) $f(x)= 2e^x+3^x+\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+7^x$; е) $f(x)= \frac{2}{x^2}+\sqrt{x}$.

7. Берилген үч функциянын ичинен бирөө анын туундусу жана экинчиси ал үчүн баштапкы функция болгон функцияны көрсөткүлө:

а) $f(x)= \frac{1}{x^2}$, $g(x)= \frac{-1}{x}+1$, $h(x)=-\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x)= x^3-\cos x$, $g(x)=6x+\cos x$, $h(x)= 3x^2+\sin x$;

в) $f(x)= 7$, $g(x)=7x+9$, $h(x)= \frac{7x^2}{2}+9x$;

г) $f(x)=9-2\sin x$, $g(x)=9x+2\cos x$, $h(x)= -2\cos x$.

§ 2. Баштапкы функциялардын негизги касиеттери жана аныкталбаган интеграл

Баштапкы функциялардын негизги касиеттерин төмөнкү эки теорема аркылуу беребиз.

Теорема 1 (функциянын турактуулугунун белгиси). Эгерде кандайдыр бир $(a; b)$ аралыгында $F'(x)=0$ болсо, анда F функциясы $(a; b)$ аралыгында турактуу чоңдук болот.

Далилдөө. $(a; b)$ аралыгынан каалаган кандайдыр бир x_0 чекитин алалы. Анда бул аралыктын каалаган x саны үчүн Лагранждын формуласынын негизинде $F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0)$ барабардыгы аткарылгандай x жана x_0 чекиттеринин арасында жайланышкан c санын табууга болот. $c\in(a; b)$ болгондуктан шарт боюнча $F'(c)=0$. Демек $F(x)-F(x_0)=0$. Мындан $F(x)=F(x_0)$, $x\in(a; b)$, б.а. ар кандай $x\in(a; b)$ үчүн F функциясы турактуу мааниге ээ. Теорема 1 далилденди.

Теорема 2. Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын $(a; b)$ аралыгындагы баштапкы функциясы болсо, анда $f(x)$ функциясынын $(a; b)$ аралыгындагы каалагандай $\Phi(x)$ баштапкы функциясы

$$\Phi(x)= F(x) + C \qquad (1)$$

формуласы менен аныкталат.

Д а л и л д ө ө. Баштапкы функциянын аныктамасы боюнча. Ар кандай $x\in(a;\ b)$ үчүн $F'(x)= f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$ болот, б. а. $(\Phi(x) - F(x))'=0$.

Теорема 1дин жана акыркы теңдештиктин негизинде $\Phi(x) - -F(x) = C$ теңдештигин б. а. (1) теңдештикти алабыз. Теорема 2 далилденди.

А н ы к т а м а. Берилген $f(x)$ функциянын бардык баштапкы функцияларынын жыйындысы $f(x)$ функциянын *аныкталбаган интегралы* деп аталат жана ал аныкталбаган интеграл $\int f(x)dx$ менен белгиленет. Мында, $\int$ символу интеграл белгиси, $f(x)$ – интеграл астындагы функция жана x интегралдоонун өзгөрмөсү.

Эгерде берилген $f(x)$ функциянын кандайдыр бир $F(x)$ баштапкы функциясы белгилүү болсо, анда теорема 2 нин негизинде

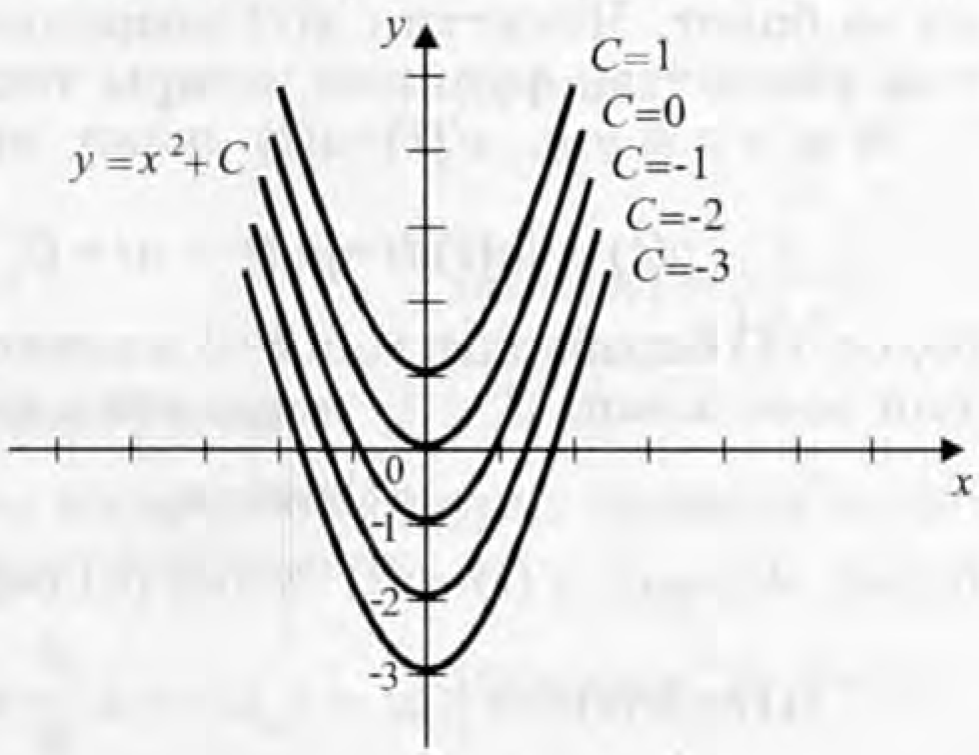
$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \qquad (2)$$

мында C – каалагандай турактуу сан. Бул (2) формула төмөнкүдөй окулат: "$f(x)$ функциянын аныкталбаган интегралы $F(x)+C$ болот". Эгерде $F(x) + C$ ны тапсак, анда биз $f(x)$ функциясынын интегралын таптык деп айтабыз.

1-м и с а л. $f(x)=2x$ функциясынын R деги баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. $\int f(x)\,dx=\int 2xdx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int 2xdx = x^2+C$, мында C – каалагандай турактуу сан. Себеби, $F(x)= x^2$ функциясы $f(x)= =2x$ функциясынын баштапкы функция болот, б. а. $(x^2)'= 2x$.

Төмөнкү 1-чиймеде $f(x) = = 2x$ функциянын $F(x) = =x^2+ C$ баштапкы функцияларынын графиги көрсөтүлгөн.



1-чийме.

2-м и с а л. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ функциясынын $(0;\ \infty)$ аралыгындагы баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C$, C – каалагандай турактуу сан. Себеби, $F(x)=\sqrt{x}$ функциясы $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ функциясынын баштапкы функцияларынын бири болот, б. а. $(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3-м и с а л. $R=(-\infty;\infty)$ аралыгында аныкталган $f(x)=3\cos x$ функциясынын баштапкы функцияларынын арасынан $x=\frac{\pi}{2}$ болгондо мааниси 5 болгон $F_0(x)$ баштапкы функциясын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Берилген $f(x)=3\cos x$ функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрү $F(x)=\int f(x)dx=\int 3\cos x dx$ интегралы менен аныкталат, б. а.

$$F(x)=3\sin x+C, \qquad (3)$$

C – каалагандай турактуу сан. Шарт боюнча $F(\frac{\pi}{2})=5$ болгондуктан, (3) формуладан C га карата, $3\sin\frac{\pi}{2}+C=5$ түрүндөгү теңдемени алабыз. Мындан $C=2$. Демек $F_0(x)=3\sin x+2$ функциясы биз издеген баштапкы функция болот.

4-м и с а л. Чекит түз сызык боюнча a турактуу ылдамдануу менен кыймылдайт. Чекит убакыттын баштапкы $t_0=0$ моментинде x_0 баштапкы координатага жана v_0 баштапкы ылдамдыкка ээ болот. Чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын убакыттан функция катары тапкыла.

Ч ы г а р у у. $v'(t)=a(t)$ жана $a(t)=a$ барабардыктарынан

$$v(t)=\int a(t)dt=\int adt=at+C_1 \qquad (4)$$

болот. (4) барабардыгына $t=0$ маанисин коюп жана $v(0)=v_0$ шартын эске алып, $C_1=v_0$ экендигин табабыз. Анда

$$v(t)=at+v_0 \qquad (5)$$

болот. Ал эми $x'(t)=v(t)$ жана (5) барабардыктарынан

$$x(t)=\int v(t)dt=\int(at+v_0)dt=a\frac{t^2}{2}+v_0t+C_2 \qquad (6)$$

экендиги келип чыгат. (6) барабардыгына $t=0$ маанисин коюп жана $x(0)=x_0$ шартын эске алып, $C_2=x_0$ ду алабыз. Ошентип, $x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$ болот.

Демек, аныкталбаган интеграл дифференцирлөө операциясына тескери болгон операцияны мүнөздөйт.

Төмөндө кээ бир функциялардын баштапкы функцияларынын таблицасы б. а. интегралдоо формулалары көрсөтүлгөн.

Аныкталбаган интеграл	Себеби
1. $\int 0dx = C$	$C'=0$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$
6. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C, \quad k \neq 0$	$\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)' = \sin kx$
7. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C,$	$\left(\frac{\sin kx}{k}\right)' = \cos kx$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$	$(-\mathrm{ctg}\, x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

мында C – каалагандай турактуу сан.

5-м и с а л. Жогорудагы интегралдоо формулаларын колдонуп, чыгарылган көнүгүүлөрдү келтирели:

а) $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$ (формула 2, $n=6$),

б) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C,$ (формула 2, $n=-\frac{1}{3}$),

в) $\int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C,$ (формула 6, $k=3$), г) $\int \cos\frac{x}{4}dx = \int \cos\frac{1}{4}xdx = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{4}\right)x}{\left(\frac{1}{4}\right)} + C = 4\sin\frac{x}{4} + C$ (формула 7, $k = \frac{1}{4}$),

д) $\int 9^x dx = \dfrac{9^x}{\ln 9} + C,$ (формула 5, $a = 9$).

Көнүгүүлөр

Берилген f функциясы үчүн анын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн б. а. аныкталбаган интегралын тапкыла (8–10).

8. а) $f(x) = 7x - 2;$ б) $f(x) = -2;$

в) $f(x) = 4x^3;$ г) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{\cos^2 x}.$

9. а) $f(x) = \dfrac{1}{x^4};$ б) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sin x;$

в) $f(x) = 7^x + x^9;$ г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

10. а) $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x};$ б) $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

в) $f(x) = x^{-\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{1 + x^2};$ г) $f(x) = x - \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (11–13).

11. а) $\int (3 - x^5)dx;$ б) $\int (x^3 + \cos x)dx;$

в) $\int 7dx;$ г) $\int \sqrt{x}dx.$

12. а) $\int \dfrac{1}{x^2}dx;$ б) $\int t^{-\frac{1}{3}}dt;$

в) $\int \sin\dfrac{s}{7}ds;$ г) $\int \cos 9y dy.$

13. а) $\int \dfrac{3}{\sqrt{1 - u^2}}du;$ б) $\int \left(\dfrac{3}{1 + v^2} - v\right)dv;$

в) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{r}\right)dr;$ г) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sin\theta\right)d\theta.$

14. Көрсөтүлгөн чекитте берилген мааниге ээ болгон f тин баштапкы функциясы F ти тапкыла:

а) $f(x) = x^2,$ $F(-2) = 3;$ б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},$ $F\left(\frac{1}{3}\right) = 1;$

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$; *г*) $f(x)=\cos x$, $\quad F(\pi)=4$.

15. Графиги берилген M чекити аркылуу өткөн жана f тин баштапкы функциясы болгон функцияны тапкыла:

а) $f(x)=3\sin x$, $\quad M(\dfrac{\pi}{2};\ 1)$;

б) $f(x)=4-x^3$, $\quad M(2;\ 7)$;

в) $f(x)=\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$, $\quad M(\dfrac{\pi}{4};\ -3)$;

г) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$, $\quad M(\dfrac{1}{2};\ 4)$.

16. Чекит $a(t)$ ылдамдануу менен түз сызык боюнча кыймылга келет. Чекит убакыттын баштапкы t_0 моментинде x_0 баштапкы координатага жана v_0 баштапкы ылдамдыкка ээ болот. Убакыттын ар кандай t маанисинде чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын тапкыла.

а) $a(t)=\cos t$, $\quad t_0=\dfrac{\pi}{2},\ x_0=3,\ v_0=1$;

б) $a(t)=-3t$, $\quad t_0=1,\ x_0=2,\ v_0=4$;

в) $a(t)=7t$, $\quad t_0=0,\ x_0=4,\ v_0=1$;

г) $a(t)=\sin t$, $\quad t_0=\pi,\ x_0=1,\ v_0=2$.

§ 3. Аныкталбаган интегралды табуунун эрежелери

Бул эрежелер туунду табуунун тиешелүү эрежелерине окшош. Эрежелер:

1. Эгерде $f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияга ээ болсо, анда ар кандай $k\in R$ үчүн $kf(x)$ функциясы дагы $(a;\ b)$ да баштапкы функцияга ээ болот жана

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

барабардыгы орун алат.

Д а л и л д ө ө. Турактуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга мүмкүн болгондуктан $(k\int f(x)dx)' = k(\int f(x)dx)' = k\,f(x)$ болот.

2. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияларга ээ болсо, анда $f(x)+g(x)$ жана $f(x)-g(x)$ функциялары дагы $(a;\ b)$ аралыгында баштапкы функцияларга ээ болот жана

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

барабардыктары орун алат.

Д а л и л д ө ө. Сумманын же айырманын туундусун эсептөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\int f(x) \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

3. Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын R аралыгында баштапкы функциясы болсо, б. а. $\int f(x)dx = F(x) + C$ болсо, анда ар кандай $k \in R$, $b \in R$, $k \neq 0$ үчүн $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функциясы $f(kx+b)$ функциясынын R аралыгындагы баштапкы функциясы болот, б. а.

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

барабардыгы орун алат. Мында C – каалагандай турактуу сан.

Д а л и л д ө ө. Чындыгында эле татаал функциянын туундусун эсептөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)(kx+b)' = f(kx+b).$$

Бул эрежелерди колдонууга мисалдар келтирели.

1-м и с а л. Төмөнкү $\int 4x^5dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. 1-эрежени колдонуп, $\int 4x^5dx = 4\int x^5dx = 4\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{2}{3}x^6 + C$ жообун алабыз.

2-м и с а л. Төмөнкү $\int\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Биринчи 2-эрежени колдонуп, андан кийин $\frac{x^3}{3}$ функциясы x^2 тын жана $\frac{x^{-2}}{(-2)}$ функциясы $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ функциясынын баштапкы функциялары экендигин эске алып, $\int\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int x^2\,dx + \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{2} + C$ жообун алабыз.

3-м и с а л. Төмөнкү $\int\cos(7x-3)\,dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Биз $\int\cos x\,dx = \sin x + C$ экендигин эске алсак, анда берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=7$, $b=-3$, $F(x)=\sin x$ болгондо колдонобуз.

Анда $\int \cos(7x-3)\,dx=\frac{1}{7}F(7x-3)+C=\frac{1}{7}\sin(7x-3)+C$ жообун алабыз.

4-м и с а л. Массасы 3 *кг* болгон материалдык чекит Ox огу боюнча багытталган күчтүн аракети менен кыймылга келет. Убакыттын t моментинде бул күч $F(t)=2t-1$ ге барабар. Эгерде $t=1$*сек* кезинде чекиттин ылдамдыгы 4 *м/сек* га барабар, ал эми координатасы $x=2$ экени белгилүү болсо, чекиттин $x(t)$ координатасын жана $v(t)$ ылдамдыгын тапкыла. Мында F – күч *Ньютон* менен, t – убакыт *секунда* менен, x – жол *метр* менен туюнтулган.

Ч ы г а р у у. Ньютондун экинчи закону боюнча $F=ma$ болот. Мында a – ылдамдануу. Бул формуладан $a(t)=\frac{F}{m}=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}$. Ал эми $a(t)$ ылдамдануунун баштапкы функциясы болуп чекиттин $v(t)$ ылдамдыгы эсептелет.

Ошондуктан $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\left(\frac{2t}{3}-\frac{1}{3}\right)dt=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{3}t+C_1$ болот. Берилген $v(1)=4$ шартынан турактуу C_1 ди табабыз: $\frac{1}{3}\cdot 1^2-\frac{1}{3}\cdot 1+$ $+C_1=4$, б. а. $C_1=4$.

Демек $v(t)=\frac{1}{3}(t^2-t)+4$ болот. Бул $v(t)$ ылдамдыгы үчүн баштапкы функциясы болуп $x(t)$ координатасы эсептелет, б. а. $x(t)=\int v(t)\,dt=\int\left[\frac{1}{3}(t^2-t)+4\right]dt=\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{6}t^2+4t+C_2$ болот. Берилген $x(1)=2$ шартынан турактуу C_2 ни табабыз: $\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+4+C_2=2$, $C_2=-\frac{35}{18}$.

Демек, чекиттин кыймылдоо закону $x(t)=\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{6}t^2+4t-\frac{35}{18}$ формуласы менен аныкталат.

5-м и с а л. Төмөнкү $\int(9x+7)^{20}dx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда $\int x^{20}dx=\frac{x^{21}}{21}+C$ болгондуктан, берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени $k=9$, $b=7$, $F(x)=\frac{x^{21}}{21}$ болгондо колдонобуз. Анда $\int(9x+7)^{20}\,dx=\frac{1}{9}F(9x+7)+C=\frac{1}{189}(9x+$ $+7)^{21}+C$ болот.

6-м и с а л. Төмөнкү $\int\frac{dt}{\sqrt{5t+4}}$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{t}+C$ экендигин

эске алсак, анда берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени k=5, b=4, $F(t)=2\sqrt{t}$ болгондо колдонобуз. Анда

$$\int\frac{1}{\sqrt{5t+4}}dt=\frac{1}{5}F(5t+4)+C=\frac{2}{5}\sqrt{5t+4}+C \text{ болот.}$$

7-м и с а л. Төмөнкү $\int\frac{dy}{1+(7y+9)^2}$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда $\int\frac{dy}{1+y^2}=\text{arctg } y+C$ болгондуктан, берилген интегралды табуу үчүн 3-эрежени k=7, b=9, $F(y)=\text{arctg}y$ болгондо колдонобуз. Анда $\int\frac{dy}{1+(7y+9)^2}=\frac{1}{7}F(7y+9)+C=\frac{1}{7}\text{arctg}(7y+$ $+9)+C$ болот.

8-м и с а л. Төмөнкү $\int\sin^2 xdx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ формуласын эске алсак, анда

$$\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+C=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+C \text{ болот.}$$

9-м и с а л. Төмөнкү $\int\cos^2 xdx$ интегралын тапкыла.

Ч ы г а р у у. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ формуласын эске алсак, анда

$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}x+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+C=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C \text{ болот.}$$

Көнүгүүлөр

17. Берилген функциялардын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x)=3-x^2+\dfrac{2}{x^2}$; *б)* $f(x)=2x+\dfrac{3}{x^4}+7\sin x$;

в) $v(t)=(5t-4)^{16}$; *г)* $f(s)=\dfrac{3}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-s\right)}$;

д) $g(y)=\dfrac{3}{y^6}-\dfrac{4}{\cos^2(4y-3)}$; *е)* $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{1-(10x-3)^2}}$.

18. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int(3x^3-4x+\dfrac{9}{x})dx$; *б)* $\int\dfrac{9x^7+4}{x^3}dx$;

в) $\int(4x^2-x+5)dx$; *г)* $\int\left(\dfrac{3}{\cos^2 x}+\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

д) $\int 3x\sqrt{x}dx$; *е)* $\int\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}dx$.

19. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int\sin(4x+5)dx$; *б)* $\int(2x-4)^{12}dx$;

в) $\int\cos(3t-1)dt$; *г)* $\int\left(\dfrac{4}{\cos^2(2x+1)}\right)dx$;

д) $\int\dfrac{dx}{(6x-9)^4}$; *е)* $\int\dfrac{5dx}{1+(9x-2)}dx$.

20. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int[5-\sin 4x+6\cos(\frac{\pi}{4}-x)]dx$;

б) $\int(\dfrac{2}{\cos^2 3x}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}-4x^3)dx$;

в) $\int[\dfrac{4}{\sin^2(5x-1)}+7\cos(6-x)+9x]dx$.

21. Эгерде f функциясынын баштапкы функциясы болгон F тин графиги M чекити аркылуу өтсө, анда F функциясын тапкыла.

а) $f(x)=7x+9$, $M(0;\ 1)$;

б) $f(x)=4x^2+x$, $M(1;\ 3)$;

в) $f(x)=x+4$, $M(2;\ 4)$.

22. Түз сызык боюнча кыймылда болгон чекиттин ылдамдыгы $v(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин координатасы x_0 гө барабар болсо, анда $x(t)$ нын t убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла.

а) $v(t)=t^2+3t-2$, $t_0=0$, $x_0=7$;

б) $v(t)=4\cos\frac{t}{2}$, $t_0=\frac{\pi}{3}$, $x_0=9$;

в) $v(t)=3\sin t$, $t=\frac{\pi}{2}$, $x_0=4$.

23. Түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин ылдамдануусу $a(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин координатасы x_0гө, ал эми ылдамдыгы v_0гө барабар болсо, анда чекиттин кыймылынын законун тапкыла:

а) $a(t)=6t^2+2$, $t_0=1$, $x_0=4$, $v_0=5$;

б) $a(t)=8t+9$, $t_0=0$, $x_0=6$, $v_0=3$.

24. f тин F_1 баштапкы функциясынын графиги M чекити аркылуу, ал эми F_2 баштапкы функциясынын графиги N чекити аркылуу өтөт. Бул F_1 жана F_2 функцияларынын кайсынысынын графиги жогору жайгашкан? $F_1 - F_2$ ни тапкыла.

а) $f(x)=6x^2-4x+3$, $M(1;\ -1)$, $N(1;\ 3)$;

б) $f(x)=-3x^2+2x-4$, $M(1;\ 2)$, $N(0;\ 4)$;

в) $f(x)=2x-x^3$; $M(2;\ -1)$, $N(-2;\ 2)$;

г) $f(x)=(3x+2)^2$, $M(0;\ 1)$, $N(-1;\ 1)$.

25. Массасы m болгон материалдык чекит Ox огун бойлото багытталган күчтүн аракети астында ушул ок боюнча кыймылга келет. Бул күч убакыттын t моментинде $F(t)$ га барабар. Эгерде $t=t_0$ болгондо чекиттин ылдамдыгы v_0 гө, ал эми координатасы x_0 гө барабар болсо, $x(t)$ нын t убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла ($F(t)$ – *ньютон*. t – *секунда*, v – *метр/сек*, m – *килограмм* менен ченелет):

а) $F(t)=4t+2$, $t_0=1$, $v_0=3$, $x_0=-4$, $m=2$;

б) $F(t)=21\sin t$, $t_0=\pi$, $v_0=2$, $x_0=3$, $m=7$;

в) $F(t)=20\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0=4$, $x_0=6$, $m=5$;

г) $F(t)=12t+12$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$, $m=6$.

26. Төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int t^{-\frac{1}{3}}dt$; б) $\int (2-5y^{-2})^{12}dy$;

в) $\int \left(\frac{z^3}{4}+\frac{z^2}{2}\right)dz$; г) $\int \sqrt{36s^3}ds$;

д) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\sqrt{u}\right)du$; е) $\int \frac{s^3-1}{s-1}ds$.

27. а) $\int (\theta+3\cos\theta)d\theta$; б) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sin t\right)dt$;

в) $\int \cos\frac{t}{4}dt$; г) $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;

д) $\int 5\sin^2\theta d\theta$; е) $\int 6\cos^2 tdt$.

28. а) $\int \sin y\cos ydy$; б) $\int (2-\cos^2 u)du$;

в) $\int (1+\mathrm{tg}^2 x)dx$; г) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}^2 t}{2}dt$.

Төмөнкү интегралдык формулалардын туура экендигин туунду алуунун жардамы менен көрсөткүлө (29–30).

29. а) $\int (7x-2)^3dx=\frac{(7x-2)^4}{28}+C$,

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 6x}=\frac{\mathrm{tg}6x}{6}+C$,

в) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+C$;

г) $\int \cos(9x+4)dx=\frac{1}{9}\sin(9x+4)+C$.

30. *а)* $\int \frac{9}{(x+9)^2}dx = \frac{-9}{x+9} + C,$ б) $\int \frac{1}{\sin^2 7x}dx = \frac{-\mathrm{ctg}7x}{7} + \mathrm{C}.$

Төмөнкү формулалардын туура же ката экендигин көрсөткүлө (31–32).

31. *а)* $\int (3x+2)^2 dx = \frac{(3x+2)^3}{3} + C,$

б) $\int 3(3x+2)^2 dx = (3x+2)^3 + C,$

в) $\int 9(3x+2)^2 dx = (3x+2)^3 + C.$

32. *а)* $\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2}\sin x + C,$

б) $\int x \sin x dx = -x\cos x + C,$

в) $\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

33. Эгерде $f(x) = \frac{d}{dx}(1-\sqrt{x}\,)$, $g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$ болсо, анда төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int f(x)\,dx;$ *б)* $\int g(x)\,dx;$

в) $\int (-f(x))\,dx;$ *г)* $\int (-g(x))\,dx;$

д) $\int [f(x)+g(x)]\,dx;$ *е)* $\int [f(x)-g(x)]\,dx.$

34. Эгерде $f(x) = \frac{d}{dx}e^x$, $g(x) = \frac{d}{dx}(x\sin x)$ болсо, анда төмөнкү интегралдарды тапкыла:

а) $\int [-f(x)]\,dx;$ *б)* $\int [-g(x)]\,dx;$

в) $\int [f(x)+g(x)]\,dx;$ *г)* $\int [f(x)-g(x)]\,dx;$

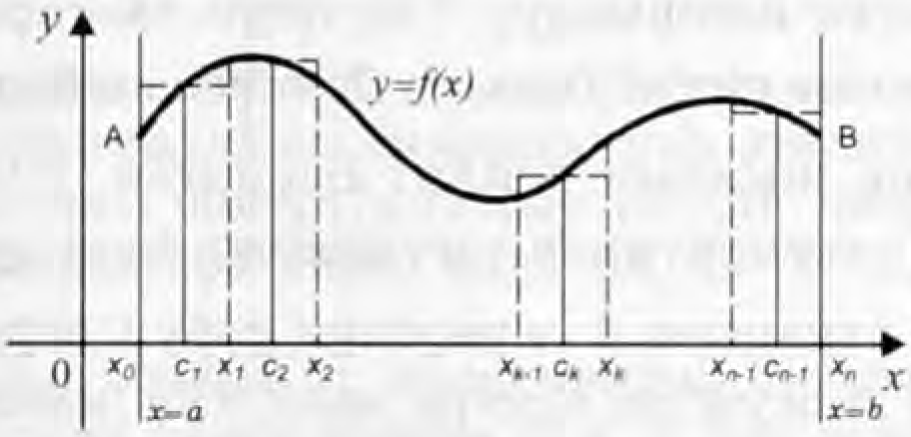
д) $\int [x+f(x)]\,dx;$ *е)* $\int [g(x)-4]\,dx.$

§ 4. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛ

4.1. Аныкталган интеграл түшүнүгүнө келүүчү маселелер

Илимдин түрдүү тармактарындагы көптөгөн маселелер аныкталган интеграл түшүнүгүнүн жардамы менен чечилет. Төмөндө, аныкталган интеграл түшүнүгүнө келүүчү геометрия жана механиканын эки маселесине токтололу.

1. Ийри сызыктуу трапеция жана анын аянты. $y=f(x)$ функциясы $[a; b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция жана ар кандай $x\in [a; b]$ үчүн $f(x)\geq 0$ болсун. Анда $x=a$, $x=b$, $y=0$ түз сызыктары жана $y=f(x)$ функциянын графиги менен чектелген фигураны *ийри сызыктуу трапеция* деп айтабыз (2-чийме, $aABb$ фигурасы). Эгерде $f(a)=0$ болсо, A чекити $(a; 0)$ менен дал келет, ал эми $f(b)=0$ болсо, B чекити $(b; 0)$ менен дал келет. Мында $A(a; f(a))$; $B(b; f(b))$.



2-чийме.

2-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын табыш керек болсун.

Ал аянтты табуу үчүн $[a; b]$ сегментин x_k $(k=0,1,...,n)$ чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a=x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{k-1} < x_k <...< x_{n-1} < x_n=b$ жана ушул x_i $(i=1, 2,...,n-1)$ бөлүү чекиттеринен Ox огуна перпендикулярларды жүргүзүп, аларды AB ийри сызыгы менен кесилишкенче созобуз. Анда берилген ийри сызыктуу трапеция n бөлүккө бөлүнөт. Анын k – бөлүгүн T_k $(k=1, ...,n)$ менен белгилесек, анда ал $x= x_{k-1}$, $x= x_k$, $y=0$ түз сызыктары жана AB ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапеция болот. Ар бир $[x_{k-1}; x_k]$ сегменттин $(k=1,...,n)$ каалаган c_k элементи үчүн $(c_k, f(c_k))$ чекитинен Ox огуна жарыш түз сызык жүргүзсөк, анда $x= x_{k-1}$, $x= x_k$, $y=0$ жана $y=f(c_k)$ түз сызыктары менен чектелген B_k тик бурчтугун алабыз. Ал B_k тик бурчтугунун аянты $f(c_k)\Delta x_k$ санына барабар, мында $\Delta x_k= x_k - x_{k-1}$. Эми берилген $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын S менен белгилеп жана B_k тик бурчтугунун аянты T_k ийри сызыктуу трапециянын аянтынын жакындаштырылган маанисин берерин эске алсак, анда

$$S \approx f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \qquad (1)$$

болот. Мында $\sum$ – белгиси суммалоо дегенди билдирет жана сумма деп окулат. Мисалы

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1\,,\ \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2\,,\ \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3\,,\ \sum_{k=3}^{5} a_k = a_3 + a_4 + a_5$$

болот. Эгерде $[a;\ b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. $[x_{k-1};\ x_k]$ сегментинин узундугун чексиз кичирейтсек ($\Delta x_k \to 0$), анда (1) сумма биз издеген аянттын так маанисин берет:

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

2. Өзгөрмөлүү күчтүн жумушу. Сан огунда Ox огунун багыты менен дал келген өзгөрмөлүү $\bar{F}$ күчүнүн таасири астында материалдык чекит ал октун багыты боюнча кыймылдап a чекитинен b чекитине жылсын дейли. Берилген $\vec{F}$ күчүнүн $|\vec{F}| = F(x)$ чоңдугу $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсун. Максат, $\bar{F}$ күчүнүн аткарган A жумушун табуу керек. Турактуу $\bar{F}$ күчү аткарган A жумуш күчтүн чоңдугун материалдык чекиттин басып өткөн жолунун узундугу $(b - a)$ га көбөйткөнгө барабар экендиги физикадан белгилүү, б. а. $A = |\vec{F}|(b - a)$ болот.

Өзгөрмөлүү $\vec{F}$ күчү аткарган A жумушун табуу үчүн $[a;\ b]$ сегментин x_k $(k=1,\ldots,n)$ чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Бөлүүнүн санын көбөйтүү (n ди чоңойтуу) аркылуу $[x_{k-1};\ x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ сегментинин узундугун каалагандай кичирейте алабыз. Ушул себептүү жана $\bar{F}$ күчүнүн чоңдугунун $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз экендигин эске алсак, анда ал күчтүн чоңдугунун жакындаштырылган мааниси $[x_{k-1};\ x_k]$ сегментинде турактуу чоңдук болот. Анда ар кандай $c_k \in [x_{k-1};\ x_k]$ үчүн $\bar{F}$ күчүнүн ар бир $[x_{k-1};\ x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ сегментинде аткарган жумушунун жакындаштырылган мааниси $F(c_k)\,\Delta x_k$, $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ болот. Ал эми $\bar{F}$ күчүнүн $[a;\ b]$ сегментинде аткарган A жумушунун жакындаштырылган мааниси

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k\,,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad (3)$$

формуласы менен табылат. Эгерде $[a;\ b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. $[x_{k-1};\ x_k]$ аралыгынын узундугун чексиз кичирейтсек ($\Delta x_k \to 0$), анда (3) сумма биз издеген жумуштун так маанисин берет:

$$A=\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\, \Delta x_k. \qquad (4)$$

4.2. Аныкталган интегралдын аныктамасы жана анын касиеттери

Бизге $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болгон каалаган $y=f(x)$ функциясы берилсин. Аныкталган интеграл түшүнүгүн аныкташ үчүн $[a; b]$ кесиндисин x_k (k=1, 2, ..., n) чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $a=x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{k-1} < x_k <...< x_{n-1} < x_n = b$. Эми $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (k=1, 2, ..., n) жана $\delta = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ белгилөөлөрүн киргизип, каалаган $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ үчүн

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \qquad (5)$$

суммасын аныктайлы. Бул (5) сумма $f(x)$ функциясынын $[a; b]$ сегментиндеги *интегралдык суммасы* деп аталат. Эгерде $[a; b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойтсок б. а. δ ны чексиз кичирейтсек, анда Δx_k (k=1, 2, ..., n) чексиз кичирейет.

А н ы к т а м а. Эгерде $[a; b]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойткондо б. а. δ ны чексиз кичирейткенде (5) интегралдык суммасы чектүү I пределине ээ болсо жана ал предел x_k менен c_k (k=1, 2, ..., n) чекиттерин тандоодон көз каранды болбосо, анда I саны $f(x)$ функциясынын $[a; b]$ сегментиндеги *аныкталган интегралы* деп аталат жана ал интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ менен белгиленет. Демек,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = I \in R. \qquad (6)$$

Бул учурда $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде *интегралдануучу* (Риман боюнча) *функция* деп аталат. Мында a саны аныкталган интегралдын төмөнкү, b саны анын жогорку предели, өзгөрүлмө чондук x интегралдоо өзгөрмөсү, функция $f(x)$ интеграл астындагы функция деп аталат. Ал эми $\int_a^b f(x)\, dx$ интегралын табуу маселеси $f(x)$ функциясын $[a; b]$ кесиндисинде *интегралдоо* деп аталат.

Аныкталган интегралдын аныктамасынан аныкталган интегралдын a, b менен $f(x)$ тен көз карандылыгы, ал эми интегралдоо өзгөрмөсүнөн көз каранды эместиги келип чыгат б. а.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ldots = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Белгилөөлөрүнүн окшоштугуна карабастан $\int f(x)\,dx$ аныкталбаган интегралы функциялардын көптүгүн, ал эми $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы белгилүү санды аныктарын эске салабыз.

Жогорудагы геометриянын жана механиканын эки маселесине кайрылсак, анда аныкталган интегралдын аныктамасынын негизинде (2) жана (4) формулалардан төмөнкү формулаларды алабыз:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{8}$$

Мында S – ийри сызыктуу трапециянын (2-чийме) аянты, A саны $\vec{F}$ күчүнүн ($|\vec{F}| = F(x)$) аткарган жумушу. Бул учурда каалагандай $x \in [a; b]$ үчүн $f(x) \geq 0$ жана $F(x) \geq 0$ болот.

Ар кандай функция интегралдануучу функция болбойт. Бирок, төмөнкү теорема туура болот.

Т е о р е м а 1. Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал функция $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болот.

Эми аныкталган интегралдын төмөнкү негизги касиеттерине токтолобуз. Ал касиеттердин далилдөөсүн аныкталган интегралдын аныктамасы же геометриялык сүрөттөлүш аркылуу көрсөтсө болот.

1. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай турактуу чоңдук $c \in R$ үчүн

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

барабардыгы аткарылат б. а. турактуу чоңдукту интегралдын сыртына чыгарууга болот.

2. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a; b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

барабардыгы аткарылат б. а. эки функциянын суммасынын интегралы ал функциялардын интегралдарынын суммасына барабар.

3. Эгерде $f(x)$, $g(x)$ функциялары $[a;\,b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо жана ар кандай $x\in[a;\,b]$ үчүн $f(x)\le g(x)$ барабарсыздыгы туура болсо, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

барабарсыздыгы да аткарылат.

4. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир $c\in[a;\,b]$ үчүн $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ барабардыгы аткарылат.

5. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\,b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай $c\in(a;\,b)$ үчүн

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

болот. Мындан $\int_a^a f(x)\,dx=0$ барабардыгы келип чыгат.

6. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\,b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ал функция $[a;\,b]$ сегментинде чектелген функция болот, б. а. ар кандай $x\in[a;\,b]$ үчүн $|f(x)|\le M$ барабарсыздыгы аткарылгандай $0<M$ саны табылат.

Мисалдар: Төмөнкү аныкталган интегралдарды аныктаманын негизинде б. а. (6) формула менен эсептегиле.

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx;\quad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx;\quad 3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)\,dx.$$

Чыгаруу: 1) $f(x)=x$ функциясы $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал функция $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде интегралдануучу функция. Демек, берилген функциянын интегралдык суммасы s_n ди (5) формула боюнча аныктоодо x_k менен c_k (k=0, 1, 2, ..., n) чекиттерин каалагандай тандай алабыз. Бул эркиндикке таянып $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментин $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=0,1,...,n) чекиттери менен бөлүп, c_k чекитин $\left[\frac{(k-1)\pi}{2n}, \frac{k\pi}{2n}\right]$ сегментинин оң учуна барабарлайлы б. а. $c_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n) болсун дейли. Мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n). Эми (5) формуланы колдонуп, берилген функция үчүн интегралдык сумманы түзөлү:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 (1+2+3+...+n) = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \frac{n+1}{2}\cdot n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (9)$$

Мында арифметикалык прогрессиянын формуласын колдонуп, $1+2+3+...+n = \frac{(n+1)n}{2}$ суммасын таптык. Анда (6) жана (9) формулалардын негизинде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (10)$$

болот.

2) Бул учурда да $f(x)=\cos x$ функциясы $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде интегралдануучу функция. Анда, берилген функциянын интегралдык суммасы s_n ди аныктоодо, x_k менен c_k (k=0, 1, 2,...,n) чекиттерин каалагандай тандай алабыз. Бул эркиндикке таянып $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ сегментин $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,...,n) чекиттери менен бөлүп, c_k чекитин $\left[\frac{(k-1)\pi}{2n}, \frac{k\pi}{2n}\right]$ сегментинин оң учуна барабарлайлы б. а. $c_k=\frac{k\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n) болсун дейли. Мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{2n}$ (k=1,2,...,n).

Эми (5) формуланы колдонуп берилген функция үчүн интегралдык сумманы түзөлү:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}\,\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}.$$

Мындан

$$s_n\cdot\sin\frac{\pi}{4n}=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\left[\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}+\cos\frac{n\pi}{2n}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}\qquad(11)$$

формуланы алабыз. Эми

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\alpha-\sin\beta$$

формуласын $\alpha=\frac{2k+1}{4n}\pi$, $\beta=\frac{2k-1}{4n}\pi\,(k=1,2,\ldots,n)$ үчүн эске алсак,

анда $2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\sin\frac{2k+1}{4n}\pi-\sin\frac{2k-1}{4n}\pi$, $(k=1,2,\ldots,n)$ формулаларын алабыз. Бул акыркы формулаларды (11) формулага колдонсок, анда $s_n\cdot\sin\frac{\pi}{4n}=\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{2k+1}{4n}\pi-\sin\frac{2k-1}{4n}\pi)=\frac{\pi}{4n}\cdot$

$\cdot\left[\left(\sin\frac{3}{4n}\pi-\sin\frac{1}{4n}\pi\right)+(\sin\frac{5}{4n}\pi-\sin\frac{3}{4n}\pi)+(\sin\frac{7}{4n}\pi-\sin\frac{5}{4n}\pi)+\ldots+\right.$

$\left.+(\sin\frac{2n-1}{4n}\pi-\sin\frac{2n-3}{4n}\pi)+\left(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi-\sin\frac{2n-1}{4n}\pi\right)\right]=\frac{\pi}{4n}\,(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi-$

$-\sin\frac{\pi}{4n})=\frac{\pi}{4n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right]$ барабардыгы келип чыгат.

Мындан $s_n=\dfrac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right]=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}.$

Эми $n\to\infty$ болгондогу пределге өтсөк, анда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}=1$$ болот. Мында ($n\to\infty$ үчүн $\alpha=\frac{\pi}{4n}\to 0$)

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ формуласын (биринчи сонун пределди) колдондук.

Демек $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1.$ (12)

3) Интегралдын 2-касиетин колдонуп берилген интегралды төмөнкүдөй жазабыз:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[3x+(-4)\cos x]dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3x\,dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-4)\cos x dx.$$

Бул барабардыктын оң жагындагы эки интегралдын ар бирине интегралдын 1-касиетин колдонуп берилген интеграл үчүн төмөнкү формуланы алабыз:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx+(-4)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

Мындан (10) жана (12) формулаларын пайдалансак, анда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3x-4\cos x)dx=3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+(-4)\cdot 1=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-4 \text{ болот.}$$

Жогорудагы мисалдардан аныкталган интегралды интегралдык сумма аркылуу эсептөө жолунун татаал экендигин көрдүк. Демек, бизге аныкталган интегралды эсептөөнүн жеңил жана жөнөкөй жолу керек. Андай жолдордун бири Ньютон-Лейбництин формуласы аркылуу аныкталган интегралды эсептөө жолу болот. Бул формула менен биз төмөндө таанышабыз.

4.3. Жогорку предели өзгөрүлмө интеграл жана Ньютон-Лейбництин формуласы

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\,b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай $x\in[a;\,b]$ үчүн, берилген функция $[a;\ x]$ сегментинде дагы интегралдануучу функция болот, б. а. ар кандай $x\in[a;\ b]$ үчүн $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ интегралы аныкталат. Бул интеграл *жогорку предели өзгөрүлмө интеграл деп аталат* жана x тен көзкаранды болгон функция болот б. а.

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{13}$$

функциясы $[a;\ b]$ сегментинде аныкталат.

Жогорку предели өзгөрүлмө интегралдын төмөнкү эки касиетине токтололу.

Теорема 1. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо, анда (13) формула менен аныкталган $F(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болот.

Далилдөө. Ар кандай $x\in[a;\ b]$, $x+\Delta x\in[a;\ b]$ үчүн $\Delta x\to 0$ болгондо, $\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)\to 0$ экендигин көрсөтөбүз. Ал үчүн (13) формулага аныкталган интегралдын 5-касиетин колдонуп

$$\Delta F(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \tag{14}$$

барабардыгын алабыз. Бул (14) барабардыкка аныкталган интегралдын 4-касиетин жана 3-касиетин пайдалансак анда кандайдыр бир $c\in[x;\ x+\Delta x]$ чекити үчүн $|\Delta F(x)|\le|f(c)||\Delta x|$, $c\in[x;\ x+\Delta x]$ барабарсыздыгы келип чыгат. Эми интегралдануучу функциянын чектелген функция экендигин эске алсак, анда акыркы барабарсыздыктан $\Delta x\to 0$ болгондо $\Delta F(x)\to 0$ экендигин көрөбүз б. а. $F(x)$ функциясы ар кандай $x\in[a;\ b]$ чекитинде үзгүлтүксүз. Демек, $F(x)$ функциясы $[a;\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болот.

Теорема 2. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо анда бул $[a;\ b]$ сегментинде $f(x)$ функциясы баштапкы функцияга ээ болот жана ал баштапкы функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a;\ b]$ формуласы менен аныкталат б. а. ар кандай $x\in[a;\ b]$ үчүн $F'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ (15)

барабардыгы аткарылат.

Далилдөө. Ар кандай $x\in[a;\ b]$, $x+\Delta x\in[a;\ b]$, $\Delta x\neq 0$ үчүн $\Delta x\to 0$ болгондо $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}[F(x+\Delta x)-F(x)]\to f(x)$ экендигин көрсөтөбүз. Ал үчүн (14) барабардыкка аныкталган интегралдын 4-касиетин колдонсок, анда кандайдыр бир $c \in [x; x+\Delta x]$ үчүн

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(c), \tag{16}$$

барабардыгын алабыз. Эми $f(x)$ функциянын $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз экендигин эске алсак, анда (16) барабардыктан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

барабардыгын б. а. (15) барабардыкты алабыз.

Н а т ы й ж а. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда

$$\int f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+C, \tag{17}$$

мында C – каалагандай турактуу сан.

Азыр аныкталган интегралды эсептөөнүн оңой жолу болгон Ньютон-Лейбництин формуласы менен таанышабыз.

Т е о р е м а 3. (Ньютон-Лейбництин формуласы) Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо жана $F(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде $f(x)$ функциянын каалагандай баштапкы функциясы болсо, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b=F(b) - F(a) \tag{18}$$

формуласы орун алат. Бул (18) формула *Ньютон-Лейбництин формуласы* деп аталат.

Д а л и л д ө ө. $F(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде $f(x)$ функциянын каалаган баштапкы функциясы болсун. Теорема 2-нин негизинде $\int_a^x f(t)\,dt$ функциясы $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы болот. Демек кандайдыр турактуу C чоңдугу үчүн

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C \tag{19}$$

барабардыгы аткарылат. Бул акыркы барабардыкка $x=a$ ны койсок, анда $C=F(a)$ болот. Анда (19) барабардыктан $\int_a^x f(t)\,dt=F(x) - F(a)$ формуласын алабыз. Бул акыркы барабардыкка $x=b$ ны койсок, анда (18) формуланы алабыз.

Эми Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп аныкталган интегралды эсептөөнүн схемасына токтолобуз:

1. Интеграл алдындагы $f(x)$ функциянын баштапкы функцияларынын кандайдыр бири болгон $F(x)$ти табуу үчүн аныкталбаган интегралды табуунун таблицасы же ыкмасы колдонулат да, анда каалаган турактуу чоңдук C га кандайдыр бир сандык маани беребиз, мисалы $C=0$ деп алабыз.

2. Табылган $F(x)$ баштапкы функциясына Ньютон-Лейбництин формуласын колдонобуз б. а. (18) формуланы колдонобуз.

Эми Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп аныкталган интегралдарды эсептөөнүн мисалдарына токтололу:

Мисалдар: Төмөнкү аныкталган интегралдарды Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп эсептегиле.

$$4)\ \int_{-1}^{3} x^2\,dx; \qquad 5)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx; \qquad 6)\ \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx; \qquad 7)\ \int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx.$$

Ч ы г а р у у: 4) $f(x)=x^2$ функциясы $[-1;\ 3]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана x^2 функциясы үчүн $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп $\int_{-1}^{3} x^2\,dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3}=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{(-1)^3}{3}=\dfrac{9+1}{3}=\dfrac{10}{3}$ барабардыгын алабыз.

5) $f(x)=\cos x$ функциясы $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\cos x$ функциясы үчүн $F(x)=\sin x$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$ барабардыгын алабыз.

6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ функциясы $[1;\ 2]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ функциясы үчүн $F(x)=-x^{-1}=-\dfrac{1}{x}$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп $\int_{1}^{2} \dfrac{1}{x^2}\,dx=\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{1}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ барабардыгын алабыз.

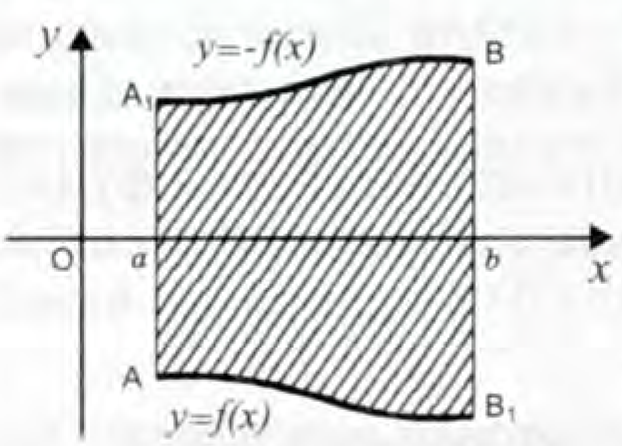
7) $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы [1; 3] сегментинде үзгүлтүксүз жана $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы үчүн $F(x)=\ln x$ функциясы баштапкы функция болот. Анда Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп $\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ барабардыгын алабыз.

Жогорудагы көрсөтүлгөн мисалдардан, биз аныкталган интегралдарды Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептөө жолунун ыңгайлуу жана эффективдүү жол экендигине ынанабыз.

4.4. Аныкталган интегралдын колдонулушу

1. Тегиздиктеги фигуранын аянты (жалпак фигуранын аянты). Эгерде ар кандай $x\in[a;b]$ үчүн $f(x)\geq 0$ болсо, анда 2-чиймедеги (4.1-пункт) $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын S аянты (7) формула менен аныкталат б. а. $S=\int_a^b f(x)\,dx$ болот.

а) Эми ар кандай $x\in[a;b]$ үчүн $f(x)\leq 0$ болсун дейли. Биздин максат 3-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты S ти табыш керек. Мында $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Бул учурда биз терс эмес $y=-f(x)$ функциясын карайбыз.

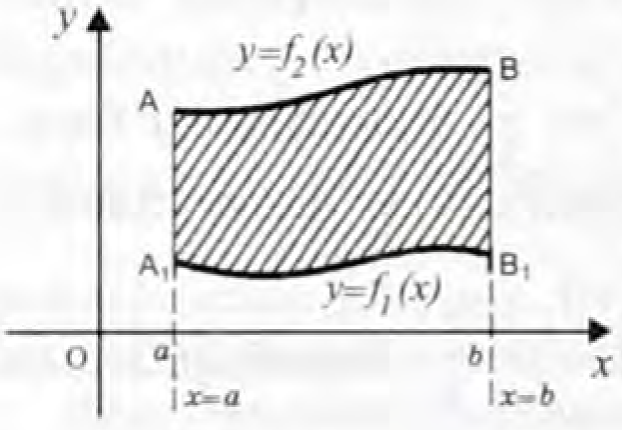


3-чийме.

Анда 3-чиймедеги $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты aA_1B_1b ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар. Себеби, aA_1B_1b ийри сызыктуу трапециясы берилген $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын Ox огуна карата симметриялуу чагылдыруудан пайда болот. Демек $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты

$$S=\int_a^b[-f(x)]\,dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (20)$$

формула менен аныкталат.



4-чийме.

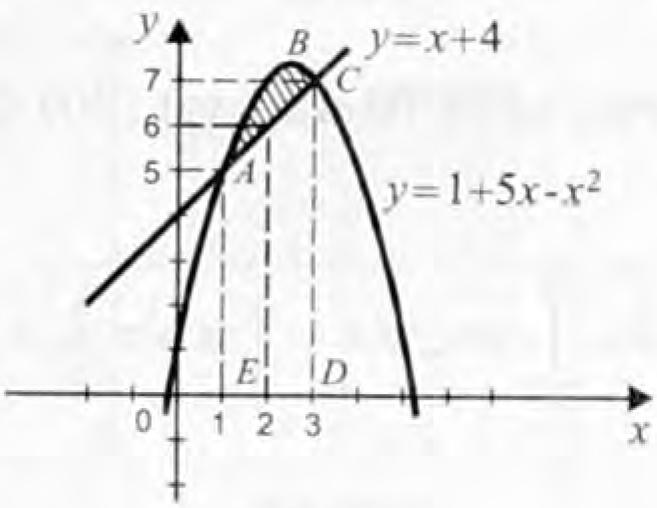
б) Эми $[a;b]$ сегментинде үзгүлтүксүз $y=f_1(x)$ жана $y=f_2(x)$ функциялары берилсин жана ар кандай $x\in[a;b]$ үчүн $f_1(x)\leq f_2(x)$ болсун дейли. Биздин максат, каптал жактарынан $x=a$, $x=b$ түз сызыктары менен чектелген, төмөн жагынан $y=f_1(x)$ функциясынын графиги жана жогору жагынан $y=f_2(x)$ функциясынын графиги менен чектелген $A_1AB\,B_1$ фигурасынын (4-чийме) аянты S ти табыш керек. Мында $A_1(a;\ f_1(a))$, $A(a;\ f_2(a))$, $B(b;\ f_2(b))$, $B_1(b;\ f_1(b))$. Бул учурда $A_1AB\,B_1$ фигуранын аянты $aABb$ жана aA_1B_1b ийри сызыктуу трапецияларынын аянттарынын айырмасына барабар болот б. а.

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (21)$$

Эскертүү: Кээде A чекити A_1 чекити менен, ал эми B чекити B_1 чекити менен дал келиши мүмкүн. Бул учурда a жана b сандарын $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесин чыгарып өзүбүз табабыз.

1-мисал: $y=x+4$ жана $y=1+5x-x^2$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функциялардын графиктеринин кесилишкен чекиттеринин абсциссаларын $x+4=1+5x-x^2$ теңдемеден табабыз. Бул теңдемени чыгарып, $x=1$ жана $x=3$ чыгарылыштары экендигин билебиз. Эми берилген функциялардын $[1;3]$ сегментиндеги графиктерин сызабыз (5-чийме). Биз аныктаган $[1;3]$ сегментинде $y=1+5x-x^2$ функциясынын графиги $y=x+4$ функциясынын графигине караганда жогору жайланышканы төмөнкү таблицадан белгилүү болот.



5-чийме.

x	1	2	3
$y=x+4$	5	6	7
$y=1+5x-x^2$	5	7	7

Изделип жаткан S аянты (штрихтелген) ийри сызыктуу $ABCDE$ жана $ACDE$ трапеция аянттарынын айырмасына барабар, б. а. (21) формуладан

$$S=S_{ABCDE}-S_{ACDE} \qquad (22)$$

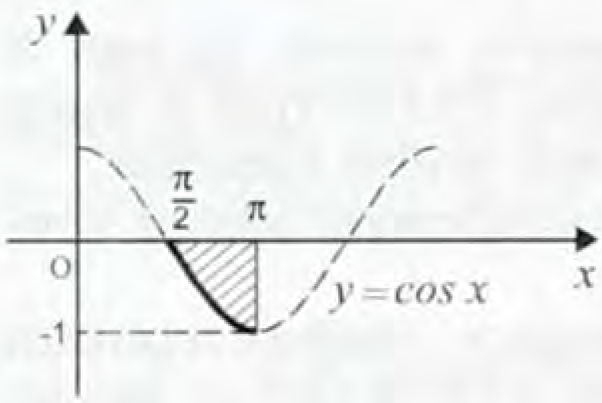
Эми (7) формуланы жана Ньютон-Лейбництин формуласын колдонсок, анда

$$S_{ABCDE}=\int_1^3 (1+5x-x^2)\,dx=\left(x+5\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\left(3+5\cdot\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right)-$$

$$-\left(1+5\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{33}{2}-\frac{19}{6}=\frac{40}{3},$$

$$S_{ACDE}=\int_1^3 (x+4)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right)-\left(\frac{1^2}{2}+4\cdot 1\right)=\frac{33}{2}-\frac{9}{2}=12$$ болот. Анда (22) формуладан $S=\frac{40}{3}-12=\frac{4}{3}$. Демек, штрихтелген фигуранын аянты $\frac{4}{3}$ квадрат бирдигине барабар.

2-м и с а л. $y=\cos x$ функциясынын $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ сегментиндеги графиги, $x=\pi$ түз сызыгы жана $0x$ огу менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.



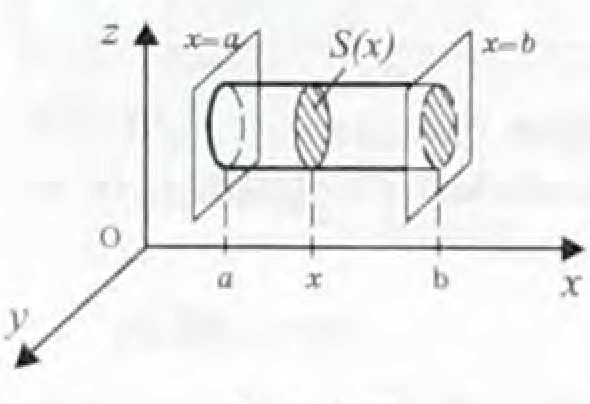
6-чийме.

Ч ы г а р у у. Ар кандай $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ үчүн $\cos x\le 0$ болгондуктан, биз издеген аянт (6-чийме) (20) формула менен табылат б. а.

$$S=\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx\right|=\left|\sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|=\left|\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right|=|-1|=1 \text{ (квадрат бирдиги).}$$

2. Көлөмдү эсептөө.

а) Берилген кесилиш аянты боюнча нерсенин көлөмүн аныктоо. Бизге мейкиндикте туюк бет менен чектелген кандайдыр бир Ω геометриялык нерсе берилсин. Бул нерсе сол жана оң жактарынан $0x$ огуна перпендикулярдуу болгон $x=a$ жана $x=b$ тегиздиктери менен чектелсин (7-чийме). Ар кандай $x\in[a;b]$ үчүн $A(x;0;0)$ чекити аркылуу өтүп жана xOy тегиздигине ($z=0$) перпендикуляр болгон тегиздик менен берилген нерсенин кесилишинен пайда болгон жалпак фигуранын аянты белгилүү $S(x)$ (7-чийме) санына барабар болсун. Ошондой эле $S(x)$ функцияны $[a;b]$ сегментинде үзгүлтүксүз деп эсептейли.



7-чийме.

Т е о р е м а 4. Эгерде жогоруда аныкталган $S(x)$ функциясы $[a;b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда Ω нерсенин көлөмү

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad (22)$$

формуласы менен эсептелет.

Д а л и л д ө ө. Каалаган $n \in N$ саны үчүн берилген $[a;\ b]$ сегментин $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Бул учурда

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + ... + S(x_{n-1})\,\Delta x = V_n$$

болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $V_n \to V$ экендиги келип чыгат. Ал эми аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

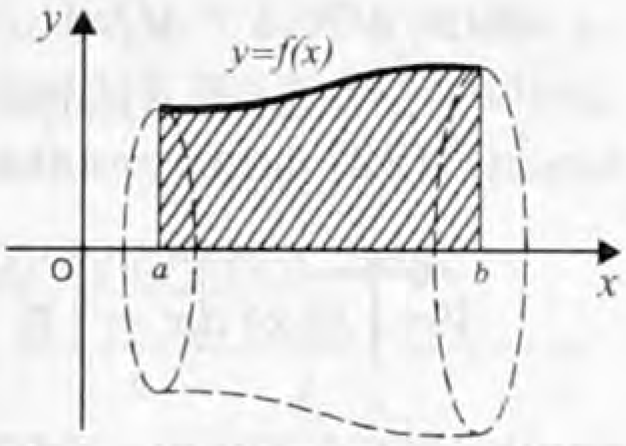
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = = \int_a^b S(x)\,dx \text{ болот.}$$

б) Жалпак фигуранын айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмү.

Т е о р е м а 5. Эгерде мейкиндиктеги Ω нерсеси xOy тегиздигиндеги $y=0$, $x=a$, $x=b$ жана үзгүлтүксүз $y=f(x)$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан (8-чийме) пайда болсо, анда Ω нерсенин көлөмү

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (23)$$

формуласы менен эсептелет.



8-чийме.

Д а л и л д ө ө. Каалаган $n \in N$ саны үчүн берилген $[a;\ b]$ сегментин $x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < b = x_n$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Бул учурда

$$V \approx \pi f^2(x_0)\Delta x + \pi f^2(x_1)\Delta x + ... + \pi f^2(x_{n-1})\,\Delta x = V_n$$

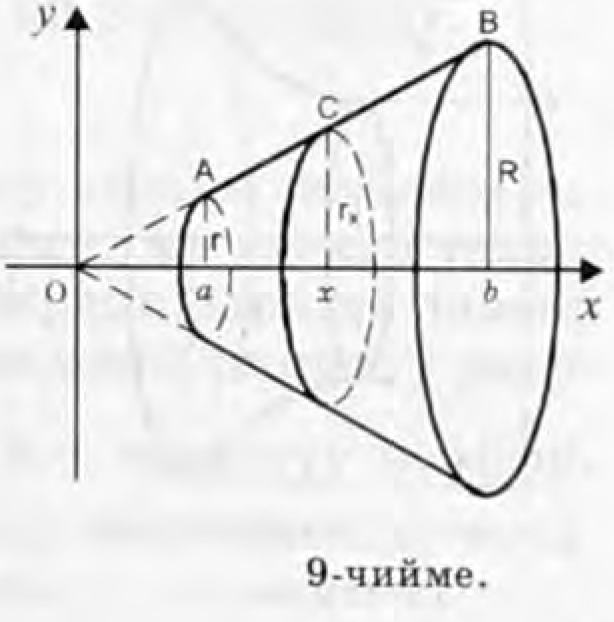
болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $V_n \to V$ экендиги келип чыгат. Бирок аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

болот.

3-м и с а л. Бийиктиги h, негиздеринин радиустары r жана R болгон кесилген конустун көлөмү V ны эсептегиле.

Ч ы г а р у у. xOy – координат системасынын O чекити аркылуу берилген конустун негизине перпендикуляр кылып Ox огун жүргүзөбүз (9-чийме). Кесилген конустун негиздери Ox огун a



9-чийме.

жана b чекиттеринде кесишет. Мында

$$h=b-a, \quad b=a+h. \qquad (24)$$

$\Delta OaA \sim \Delta ObB$ болгондугун жана (24) формуланы колдонуп

$$\frac{r}{a}=\frac{R}{b} \Rightarrow \frac{r}{a}=\frac{R}{a+h} \Rightarrow$$

$$a=\frac{rh}{R-r} \qquad (25)$$

экендиги келип чыгат. Каалаган $x \in [a;\ b]$ үчүн x чекитинен Ox огуна перпендикуляр болгон тегиздик жүргүзүп, ал тегиздик менен кесилген конустун кесилишинин аянтын $S(x)$ менен белгилейли. Анда

$$S(x)=\pi r_x^2 \qquad (26)$$

формуласын алабыз.

Эми $\Delta OaA \sim \Delta OxC$ болгондугун эске алсак, анда $\frac{r_x}{x}=\frac{r}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow r_x=\frac{r}{a}x$ болот. Акыркы формуланы жана (26) формуланы эске алып, (22) формуладан

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b \pi\left(\frac{r}{a}\right)^2 x^2dx=\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2(b^3-a^3)$$

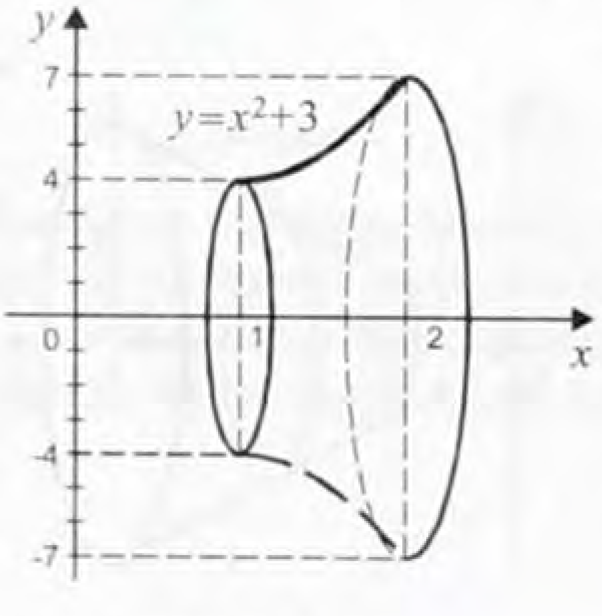
формуласы келип чыгат. Мындан (24) жана (25) формулалардын негизинде

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}[(h+a)^3-a^3]=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}(h^3+3h^2a+3ha^2)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{(R-r)^2}{h^2}h^3\left[1+3\frac{r}{R-r}+3\frac{r^2}{(R-r)^2}\right]=\frac{1}{3}\pi h[(R-r)^2+3r(R-r)+3r^2]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h[R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2]=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$$ формуласын

алабыз. Демек $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ болот.



10-чийме.

4-м и с а л. Тегиздиктеги $x=1$, $x=2$, $y=0$ жана $y=x^2+3$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан (10-чийме) пайда болгон нерсенин көлөмү Vны эсептегиле.

Ч ы г а р у у. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=$

$$\pi\int_1^2(x^2+3)^2dx=\pi\int_1^2(x^4+6x^2+9)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+6\cdot\frac{x^3}{3}+9x\right)\Bigg|_1^2=\pi\left[\left(\frac{2^5}{5}+2\cdot 2^3+9\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{5}+2+9\right)\right]=\pi\left(\frac{31}{5}+23\right)=$$

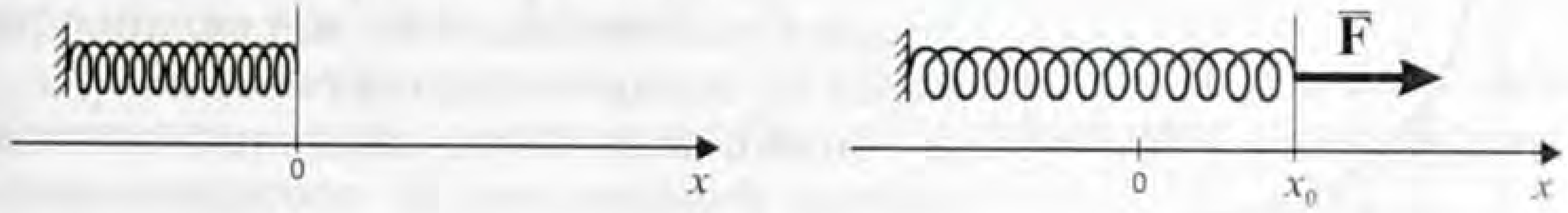
$$=\frac{146}{5}\pi \text{ (куб. бирдик).}$$

3. Өзгөрмөлүү күчтүн аткарган жумушу. Эгерде сан огунда Ox огунун багыты менен дал келген өзгөрмөлүү $\overline{F}(x)$ күчүнүн таасири астында материалдык чекит ал октун багыты боюнча кыймылдап a чекитинен b чекитинде жылса жана $F(x)=|\overline{F}(x)|$ функциясы $[a;\, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда $\overline{F}(x)$ күчүнүн аткарган A жумушу (8) формула менен табыларын биз билебиз б. а.

$$A=\int_a^b F(x)\,dx \qquad (27)$$

болот.

5-м и с а л. Пружинаны 9 *см* ге чоюш үчүн 5,4 *Н* күч жумшалат. Пружинаны 10 *см* ге чоюш үчүн кандай жумуш аткарыларын эсептегиле (11-чийме).



11-чийме.

Ч ы г а р у у. Механикадагы Гуктун закону боюнча, пружинаны x ке чоюш үчүн жумшалуучу F күчү $F=kx$ формуласы менен эсептелет, мында k – туруктуу коэффициент, О чекити пружинанын эркин абалына туура келет. Бул формулада x тин узундугу метр менен алынган. Эми k коэффициентин маселенин шартын пайдаланып табабыз. Пружинаны $x=9$ *см* же $x=0,09$ *м* ге чоюш үчүн $F=5,4$ *Н* күчү сарп кылынган. Демек, $5,4=k\cdot 0,09$ же $k=60$. Мындан $F(x)=60x$, $a=0$, $b=10$ *см* $=0,1$ *м*. Анда (27) формула боюнча биз издеген жумуш

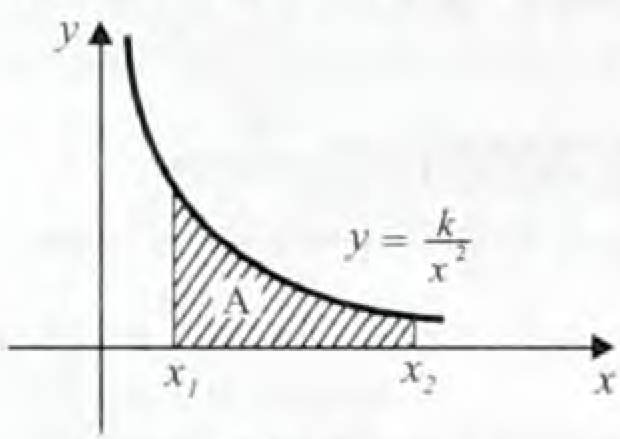
$$A=\int_0^{0,1}F(x)\,dx=\int_0^{0,1}60x\,dx=60\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,1}=30\cdot 0,01=0,3\ (Дж) \text{ болот.}$$

6-м и с а л. O чекитинде бирдик электр заряды жайланышсын дейли. Ал электр талаасын пайда кылат. Ал электр талаанын x чекитинде жайланышкан башка бирдик зарядга таасир эткен күчү аралыктын квадратына тескери пропорциялуу экендигин биз билебиз. б. а. $F(x)=\frac{k}{x^2}$, мында k – туруктуу коэффициент. Электр талаанын бирдик зарядды x_1 чекитинен x_2 чекитине жылдыргандагы A жумушун тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул учурда (27) формула боюнча биз издеген жумуш $A=\int_{x_1}^{x_2}\frac{k}{x^2}\,dx=k\int_{x_1}^{x_2}x^{-2}\,dx$. Ал эми $F(x)=\frac{k}{x^2}$ функциянын баштапкы функциясы $U(x)=-\frac{k}{x}$ болот. Анда $A=k\int_{x_1}^{x_2}x^{-2}\,dx=U(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=$ $=-\frac{k}{x}\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}$. Функция $U(x)=-\frac{k}{x}$ электр талаанын потенциалы деп аталат. Жумуш $U(x)$ функциянын өсүндүсүнө барабар.

Аныкталган интегралдын геометриялык маанисин эске алсак, анда жумушту $F(x)=\frac{k}{x^2}$ функциянын графигинин алдындагы ийри сызыктуу трапециянын аянты катарында көрсөтсө болот (12-чийме).

4. Массанын борбору. Эми массанын борборун табуу маселелерине токтолобуз.



12-чийме.

а) Эгерде Ox сан огунда жайланышкан $A_1, A_2,..., A_n$ материалдык чекиттердин системасынын массалары $m_1, m_2,..., m_n$ жана координаталары $x_1, x_2,..., x_n$ болсо, анда ал массалардын системасынын борборунун x' координатасы

$$x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \qquad (28)$$

формуласы менен табылат.

б) Берилген ичке стержен Ox огунун $[a;\,b]$ кесиндисинде жайланышсын жана ал стержендин тыгыздыгы $\rho(x)$ болсун дейли, мында $\rho(x)$ функциясы $[a;\,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция. Анда стержендин m массасы

$$m=\int_a^b\rho(x)\,dx \qquad (29)$$

формуласы менен, ал эми стержендин массасынын борборунун координатасы

$$x'=\frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx \qquad (30)$$

формуласы менен аныкталат.

Бул (29) жана (30) формулаларды далилдеш үчүн $[a;\,b]$ сегментин $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ чекиттери менен бирдей узундуктагы n кесиндиге бөлөбүз. Мында $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$, $k=1, 2, ..., n$. Бул учурда чоң n үчүн ар бир $[x_{k-1};\,x_k]$ кесиндисиндеги стержен-

дин тыгыздыгы $\rho(x_{k-1})$ ге жакын болгондугун жана (28) формуланы эске алсак, анда $m \approx \rho(x_0)\Delta x+\rho(x_1)\Delta x+...+\rho(x_{n-1})\Delta x=m_n$, $x' \approx \frac{1}{m_n}[x_0\rho(x_0)\Delta x + x_1\,\rho(x_1)\Delta x+ \ ...+\ x_{n-1}\,\rho(x_{n-1})\Delta x]=x_n'$ болот. Мындан $n \to \infty$ болгондо $m_n \to m$ жана $x_n \to x'$ экендиги келип чыгат. Ал эми аныкталган интегралдын аныктамасы боюнча

$$m=\lim_{n\to\infty} m_n=\int_a^b \rho(x)\,dx,\ x'=\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx$$

болот.

Эскертүү: Жогорудагыдай жол менен төмөнкү формулаларды көрсөтсө болот.

1) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $N(t)$ кубаттуулугу аныкталса, анда ал кубаттуулуктун $t_2 - t_1$ убакытта аткарган A жумушу

$$A=\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt \qquad (31)$$

формуласы аркылуу табылат;

2) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $I(t)$ токтун күчү аныкталса, анда электр токтун $t_2 - t_1$ убакытта алып өткөн q электр заряды

$$q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt \qquad (32)$$

формуласы менен табылат;

3) Эгерде материалдык чекит убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $v(t)$ ылдамдыгы менен кыймылдаса, анда ал материалдык чекиттин $t_2 - t_1$ убакытта басып өткөн s жолу

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad (33)$$

формуласы менен табылат;

4) Эгерде убакыттын $[t_1;\ t_2]$ аралыгында $c(t)$ сыйымдуулугу аныкталса, анда $t_2 - t_1$ убакыттагы Q жылуулуктун саны

$$Q=\int_{t_1}^{t_2} c(t)\,dt \qquad (34)$$

формуласы менен табылат.

Көнүгүүлөр

Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланып төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (35–45).

35. *а)* $\int\limits_0^1 x^5\,dx$; *б)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; *в)* $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; *г)* $\int\limits_1^2 x^3\,dx$.

36. *а)* $\int\limits_{-1}^2 dx$; *б)* $\int\limits_0^3 7\,dx$; *в)* $\int\limits_{-2}^5 x\,dx$; *г)* $\int\limits_0^1 (x^3 - x)\,dx$.

37. *а)* $\int\limits_1^4 (3 - 2x)\,dx$; *б)* $\int\limits_0^1 (x^2 + 1)\,dx$; *в)* $\int\limits_{-1}^0 (x^2 + 2x)\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 (2x^3 - x + 1)\,dx$.

38. *а)* $\int\limits_{-1}^1 (2x^2 - 5x - 7)\,dx$; *б)* $\int\limits_2^7 \frac{dx}{x^2}$; *в)* $\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x^6}$; *г)* $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

39. *а)* $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; *б)* $\int\limits_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; *в)* $\int\limits_1^2 \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^5}\,dx$; *г)* $\int\limits_1^8 \frac{2x^2 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

40. *а)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\,dx$; *б)* $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; *в)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$; *г)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

41. *а)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx$; *б)* $\int\limits_0^{\pi} (\sin x - 3\cos x - x)\,dx$; *в)* $\int\limits_0^{\pi} tg^2 x\,dx$.

42. *а)* $\int\limits_0^2 |x - 1|\,dx$; *б)* $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{x + 3}$; *в)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$; *г)* $\int\limits_{-1}^0 x^3\,dx$.

43. *а)* $\int\limits_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$; *б)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; *в)* $\int\limits_{-1}^1 x^2\,dx$; *г)* $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$;

44. *а)* $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$; *б)* $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x}\,dx$; *в)* $\int\limits_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x + 1}}$; *г)* $\int\limits_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$.

45. *а)* $\int\limits_0^2 (x^3 - 1)\,dx$; *б)* $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2x + 1)^2}$; *в)* $\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; *г)* $\int\limits_0^2 \sqrt{4x + 1}\,dx$.

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла (46–49).

46. а) $y=\int\limits_1^x \frac{t^2+1}{t}\,dt$; б) $y=\int\limits_{-1}^x \frac{t^2-1}{t}\,dt$.

47. а) $y=x\int\limits_0^x (8^3+3)\,ds$; б) $y=(\sin x)\int\limits_0^x \sin t\,dt$.

48. а) $F(x)=\dfrac{\int\limits_0^x (s+1)ds}{x+1}$; б) $F(x)=\dfrac{\int\limits_0^x \cos x dx}{2\sin x}$.

49. а) $F(t)=\frac{1}{t}\int\limits_1^t \frac{ds}{\sqrt{8+s}}$; б) $F(t)=e^{3t}\int\limits_0^t (e^{-3s}+1)\,ds$.

Теңдемелери берилген сызыктар менен чектелген фигуралардын аянттарын (адегенде сүрөттөрүн чийгиле) эсептегиле (50–66).

50. $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

51. $y=x^3$, $y=8$, $x=1$.

52. $y=2\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

53. $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$.

54. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.

55. $y=1-x^2$, $y=0$.

56. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

57. $y=x^2-x-5$, $y=x-2$.

58. $y=\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $y=0$.

59. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

60. $y=x^2-x-5$, $y=x-5$.

61. $y=x^2+x-4$, $y=6-x^2$.

62. $y=-x^2+4$, $y=2-x$.

63. $y=x^2+2$, $y=x+4$.

64. $y=x-x^2$, $y=x^2-x$.

65. $y=2^x-1$, $y=\sqrt{x}$.

66. $y=x^2$, $y=x^3$.

67. Координат тегиздигиндеги чекиттеринин координаталары үчүн $y \geq x^2$ жана $x \geq y^2$ барабарсыздыктары орун алган фигуранын аянтын эсептегиле.

68. Координат тегиздигиндеги чекиттеринин координаталары үчүн $15-7x \leq y \leq 7-3x$, $y \geq 0$ барабарсыздыктары орун алган фигуранын аянтын эсептегиле.

69. Фирма $y=3x^2$, $y=3$ сызыктары менен чектелген жер участогун (мында x менен y тин узундуктары *км* менен берилген) сатып алды. Фирма канча гектар жер сатып алды?

70. Дыйкан чарба $y=3x^2$, $y=6x$ сызыктары менен чектелген жер участогуна (мында x менен y тин узундуктары *км* менен берилген) буудай эгишип, ал участоктун ар бир гектарынан 25 *центнер* буудай алууну пландашты. План боюнча ал участоктон канча *тонна* буудай алса болот?

Төмөнкү теңдемелери менен берилген сызыктар менен чектелген фигураны $0x$ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон нерсенин көлөмүн тапкыла (71–79):

71. $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.

72. $y=\sqrt{x}+2$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

73. $y=x^2$, $y=x$.

74. $y=x+2$, $y=1$, $x=0$, $x=2$,

75. $y=2x$; $y=x+3$, $x=0$, $x=1$.

76. $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$.

77. $y=1-x^2$, $y=0$.

78. $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

79. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

80. Пружинаны 1 *см* ге кысыш үчүн $2H$ күч жумшалса, пружинаны 4 *см* ге кыскан учурдагы аткарылган жумушту тапкыла.

81. Пружинаны 9 *см* ге чоюу үчүн $7{,}2H$ күч жумшалды. Бул күчтүн аткарган жумушун тапкыла.

82. Пружинаны 30 *см* ге чоюу үчүн аткарылган жумуш 18 *Дж* болду. Эгерде 32 *Дж* жумуш аткарылса, анда пружина канча узундукка чоюлду?

83. Негизинин радиусу R жана бийиктиги H болгон конус формасындагы цистернада толо суу бар. Цистернанын чокусу аркылуу бардык суу алынгандагы жумушту тапкыла жана бул жумуштун $R=3$ *м*, $H=5$ *м* болгондогу маанисин эсептегиле (суунун тыгыздыгы $\rho=1$ $г/см^3$).

84. Эки $+10^{-4}$ *кл* жана -10^{-4} *кл* электр заряддарынын арасындагы аралык 10 *см* ге барабар. Алардын арасындагы аралыкты 10 *км* ге жеткирген жумушту тапкыла.

Кайталоо үчүн суроолор

1. Баштапкы функция деген эмне?
2. Баштапкы функциянын касиеттерин айтып бергиле.
3. Бир функциянын эки баштапкы функциясынын кандай байланышы бар?
4. Аныкталбаган интегралдын аныктамасын бергиле.
5. Аныкталбаган интеграл менен баштапкы функциянын кандай байланышы бар?
6. Аныкталбаган интегралды интегралдоонун таблицасын айтып бергиле.
7. Аныкталбаган интегралды табуунун негизги эрежелерин айткыла.
8. Ар кандай даражалуу функциянын аныкталбаган интегралы да даражалуу функция болобу?
9. Кандай фигура ийри сызыктуу трапеция деп аталат?
10. Аныкталган интегралдын аныктамасын бергиле.
11. Аныкталган интегралдын аныкталбаган интегралдан кандай айырмасы бар?
12. Ийри сызыктуу трапециянын аянтын кандай эсептейбиз?
13. Өзгөрмөлүү күчтүн жумушун кандай формула менен эсептейбиз?
14. Аныкталган интегралдын мааниси эмнеден көз каранды?
15. Аныкталган интегралдын кандай касиеттери бар?
16. Жогорку предели өзгөрүлмө интеграл жана анын туундусу жөнүндө айтып бергиле.
17. Ньютон-Лейбництин формуласын жазып, ал формуланы колдонгонго мисал келтиргиле.
18. Аныкталган интегралдын геометриядагы жана физикадагы колдонулуштары (аянт, көлөм, жумушту ж.б. эсептөө формулалары) жөнүндө айтып бергиле.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

Интеграл жөнүндөгү түшүнүктөрдүн алгачкы кадамдары Байыркы Греция менен Римдик математиктеринин эмгектери менен байланышкан. Байыркы Греция математиги Евдокс Книдск (болж.алг.б.э.ч. 408–355) жалпак фигуралардын аянттарын (квадратураларын) жана нерселердин көлөмдөрүн (кубатураларын) эсептөө үчүн аягына чыгуу методун сунуш кылган. Бул методдун жардамы менен ал көптөгөн теоремаларды далилдеген. Мисалы, конустун көлөмү ошондой эле негизге жана бийиктикке ээ болгон цилиндрдин көлөмүнүн $\frac{1}{3}$ не барабар экендигин, ал эми эки тегеректин аянттарынын катышы алардын диаметрлеринин квадраттарынын катышындай катышарын далилдеген.

Евдокстун методунун андан аркы өркүндөшү математик, механик жана инженер Архимед (болж.алг.б.э.ч. 287–212) менен байланышкан. Өзүнүн өркүндөтүлгөн методунун жана башка идеяларынын жардамы менен Архимед көп маселелерди чечкен. Ал π санынын чектерин ($3\frac{10}{11} < \pi < 3\frac{1}{7}$), шардын жана эллипсоиддин көлөмүн, параболанын сегментинин аянтын тапкан. Геометриядан белгилүү болгон тегеректин аянтынын формуласы да Архимеддин идеясынын негизинде табылган. Бул учурда, Архимеддин методун мүнөздөөчү негизги этаптар төмөнкүдөй: 1) тегеректин аянты анын сыртынан сызылган ар кандай туура көп бурчтуктун аянтынан кичине, ал эми ичинен сызылган ар кандай туура көп бурчтуктун аянтынан чоң экендиги далилденет; 2) алардын жактарын чексиз эки эселентүүдө бул туура көп бурчтуктардын аянттарынын айырмасы нөлгө умтулаары далилденет; 3) тегеректин аянтын эсептөө үчүн бул эки туура көп бурчтуктун аянттарынын катышы алардын жактарын чексиз эки эселенткенде эмнеге умтулаарын табуу жетиштүү.

Интегралдык эсептөөлөр боюнча көп ачылыштарга ээ болгон XVII кылымдын математиктери да Архимеддин илимий эмгектери менен тааныш болушкан. Архимеддин идеяларын андан ары улантып, И. Кеплер (1571–1630) «Жаңы астрономия»

(1609-ж.) жана «Вино бочкаларынын стереометриясы» (1615-ж.) деген илимий эмгектеринде бир топ фигуралардын аянттарын (мисалы, эллипс менен чектелген фигуранын аянтын) жана нерселердин көлөмдөрүн туура эсептеген. И.Кеплер өзүнүн планеталардын кыймылы жөнүндөгү закондорун ачууда, азыркы жакындатып интегралдоонун идеясына таянган. Ушул сыяктуу изилдөөлөр италиялык математиктер Б.Кавальери (1598–1647) менен Э. Торричелли (1608–1648) тарабынан да улантылган. П. Ферма 1629-жылы $y=x^n$ (мында n бүтүн сан) ийри сызыгынын квадратурасы жөнүндөгү маселени чыгарып (б. а. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $n \neq -1$, формуласын таап), анын негизинде оордук борборлорду табууга байланышкан бир топ маселелерди чечкен. Ньютондун окутуучусу И.Барроу (1630–1677) интегралдоо жана дифференцирлөө менен байланышкан түшүнүккө жакын барган.

Бирок XVII кылымдын математиктеринин көптөгөн ачылыштарына карабастан, интегралдык жана дифференциалдык эсептөөлөр боюнча изилдөөлөр толук аягына чыкпады. Ал үчүн дифференцирлөө жана интегралдоо операцияларынын ортосундагы эң негизги байланышты табыш керек эле. Муну И. Ньютон (1643–1727) менен Г. Лейбниц (1646–1716) ар бири өз алдынча таап, интегралдык жана дифференциалдык эсептөөлөрдүн негизин иштеп чыгышкан. Бул байланыш бизге Ньютон-Лейбництин формуласы деген ат менен белгилүү. Ошентип, интегралдоо менен дифференцирлөө эсептөөлөрүнүн негизи түзүлгөн.

Интегралдык эсептөөнүн методдору кийинки кылымдарда да өнүктү. Элементардык функцияларды изилдөөдө швейцариялык математик жана механик Л. Эйлер (1707–1783) менен И. Бернулли чоң салым кошушту. Интегралдык эсептөөнүн өнүгүшүнө орус математиктери М. В. Остроградский (1801–1862), В. Я. Буняковский (1804–1889), П. Л. Чебышев (1821–1894) да катышышты. Чебышев элементардык функциялар аркылуу туюнтулбай турган интегралдардын болушун далилдеген.

Интеграл теориясынын калыптанышы немис математиги Б.Римандын (1826–1866), француз математиктери О. Коши (1789–1857) менен Г. Дарбунун (1842–1917) илимий эмгектери менен тыгыз байланышкан.

К. Жордан аянт жана көлөм түшүнүктөрү менен байланышкан көп маселелердин талабына ылайыктап, өлчөм теориясын кийирди.

Интеграл түшүнүктөрүнүн ар кандай жалпыланышы француз математиктери А. Лебег (1875–1941), А. Данжуа (1884–1974) жана Т. Стилтьес жана советтик математик А. Я. Хинчин (1894–1959) тарабынан сунуш кылынган.

Эми терминдердин жана белгилөөлөрдүн келип чыгышына токтололу. Интеграл деген терминди Я. Бернулли (1690-жылы) киргизген. Ал сөз integro же integer деген латын сөзүнөн келип чыгышы мүмкүн. Мында integro деген сөз «баштапкы абалына келтирүү», «калыптандыруу» деп которулат. Ал эми integer деген сөз «бүтүн» дегенди билдирет. Интегралды $\int$ символу менен белгилөөнү Лейбниц 1675-жылы киргизген. Бул белги латын тамгасы S тин (summa деген сөздүн баш тамгасы) өзгөрүшү болот. Математиканын бул жаңы тармагын интегралдык эсептөөлөр (calculus integrals) деп И. Бернулли атаган. **Баштапкы функция** деген терминди француз математиги Лагранж 1797-жылы киргизген. Азыркы учурда $f(x)$ функциясынын бардык баштапкы функцияларынын көптүгүн аныкталбаган интеграл деп аташат. Лейбниц бир функциянын ар кандай эки баштапкы функциясы бири биринен турактуу санга гана айырмаланаарын байкап, ал аныкталбаган интеграл түшүнүгүн киргизген. Ал эми аныкталган интегралды $\int_a^b f(x)dx$ менен белгилөө француз математиги Ж. Б. Ж. Фурье (1768–1830) тарабынан сунуш кылынган.

I БӨЛҮМГӨ КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндө берилген мисалдардын жоопторунун арасынан f функциянын R облусундагы F баштапкы функциясын тапкыла (85–94):

85. $f(x)=3x+4$.

а) $F(x)=4x^2+x$; *б)* $F(x)=1,5x^2+4x$; *в)* $F(x)=-1,5x^2+4x+1$;

г) $F(x)=x^2+7x$; *д)* $F(x)=3x^2+4x$.

86. $f(x)=4\cos 2x+6x+\frac{4}{x}$.

а) $F(x)=2\sin 2x+3x^2+4\ln x+6$;

б) $F(x)=4\sin 2x+x^2+7$;

в) $F(x)=4\cos 12x+6x^2+4\ln x+7$;

г) $F(x)=2\cos 2x+3x^2+4\ln x+10$;

д) $F(x)=2\sin x+3x^2+4\ln x+11$.

87. $f(x)=-12x^5+\frac{3}{x^3}+7$.

а) $F(x)=2x^6+\frac{3}{x^3}+7x+1$; *б)* $F(x)=-2x^6+\frac{3}{x^3}+7x+8$;

в) $F(x)=-2x^6+\frac{3}{x}+7x+3;$ *г)* $F(x)=2x^6+\frac{3}{x}+7x+4;$

д) $F(x)=-2x^6-\frac{3}{2x^2}+7x+9.$

88. $f(x)=4\sin\frac{x}{2}+e^x+3^x.$

а) $F(x)=4\cos\frac{x}{2}+e^x+3^x;$ *б)* $F(x)=-4\cos\frac{x}{2}+e^x+\frac{3^x}{\ln 3};$

в) $F(x)=-8\cos\frac{x}{2}+e^x+\frac{3^x}{\ln 3};$ *г)* $F(x)=8\cos\frac{x}{2}+e^x+\frac{3^x}{\ln 3};$

д) $F(x)=-8\cos\frac{x}{2}+e^x+3^x.$

89. $f(x)=\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{3}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}.$

а) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arcsin x;$

б) $F(x)=4\operatorname{ctg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arcsin x;$

в) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arcctg}x-5\arcsin x;$

г) $F(x)=4\operatorname{tg}x+3\operatorname{arctg}x-5\arccos x;$

д) $F(x)=4\operatorname{ctg}x+3\operatorname{arcctg}x-5\arccos x.$

90. $f(x)=\frac{5}{\sin^2 x}-\frac{4}{1+x^2}+\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}+7^x.$

а) $F(x)=5\operatorname{tg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\frac{7^x}{\ln 7};$

б) $F(x)=-5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\frac{7^x}{\ln 7};$

в) $F(x)=5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arctg}x+6\arccos x+\frac{7^x}{\ln 7};$

г) $F(x)=5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{arcctg}x+6\arcsin x+\frac{7^x}{\ln 7};$

д) $F(x)=5\operatorname{tg}x+4\operatorname{arctg}x+6\arcsin x+\frac{7^x}{\ln 7}.$

91. $f(x)=12e^{4x}+5^{-2x}+\dfrac{6}{\cos^2 3x}$.

а) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{5^{-2x}}{\ln 5}+6\mathrm{tg}3x$; *б)* $F(x)=3e^{4x}+\dfrac{5^{-2x}}{\ln 5}+6\mathrm{tg}3x$;

в) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2}5^{-2x}+6\mathrm{tg}3x$; *г)* $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2\ln 5}5^{-2x}+2\mathrm{tg}3x$;

д) $F(x)=3e^{4x}-\dfrac{1}{2\ln 5}5^{-2x}+6\mathrm{tg}3x$.

92. $f(x)=6e^{-2x}+7^{3x}+\dfrac{4}{\sin^2 4x}$.

а) $F(x)=3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{\ln 7}+4\mathrm{ctg}4x$;

б) $F(x)=3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{3\ln 7}+4\mathrm{ctg}4x$;

в) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{7\ln 3}-\mathrm{ctg}4x$;

г) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{3\ln 7}-\mathrm{ctg}4x$;

д) $F(x)=-3e^{-2x}+\dfrac{7^{3x}}{\ln 3}-\mathrm{ctg}4x$.

93. $f(x)=\dfrac{2}{1+4x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

а) $F(x)=2\mathrm{arctg}x-3\arcsin x$; *б)* $F(x)=\mathrm{arctg}2x-\arcsin 3x$;

в) $F(x)=2\mathrm{arctg}x-\arcsin 3x$; *г)* $F(x)=\mathrm{arctg}2x-3\arcsin x$;

д) $F(x)=2\mathrm{arctg}2x-3\arcsin 3x$.

94. $f(x)=\dfrac{4}{1+2x^2}+\dfrac{5}{\sqrt{1-3x^2}}$.

а) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arcsin x(\sqrt{3}x)$;

б) $F(x)=4\mathrm{arctg}(\sqrt{2}x)+5\arcsin(\sqrt{3}x)$;

в) $F(x)=4\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}x)+5\arccos(\sqrt{3}x)$;

г) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arcctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arccos x(\sqrt{3}x)$;

д) $F(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x(\sqrt{2}x)+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\arccos(\sqrt{3}x)$.

Төмөндө берилген мисалдардын жоопторунун арасынан f функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла (95–99).

95. $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}+3\sqrt{x}$.

а) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+C$; ($C$ – каалагандай турактуу сан);

б) $F(x)=3\mathrm{ctg}x+2x\sqrt{x}+C$; в) $F(x)=3\mathrm{ctg}x+2x\sqrt{x}+C$;

г) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+1$; д) $F(x)=3\mathrm{tg}x+2x\sqrt{x}+8$.

96. $f(x)=kx+b$, (k жана b – каалагандай турактуу сандар).

а) $F(x)=kx^2+bx+C$; б) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+b+C$;

в) $F(x)=\dfrac{k}{2}+x^2+bx+4$; г) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+bx+C$;

д) $F(x)=\dfrac{k}{2}x^2+b+3$.

97. $f(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{x^2}$.

а) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$; б) $F(x)=\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{3}{x}+C$;

г) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+2$; д) $F(x)=\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{3}{x}+C$.

98. $f(x)=x^n$ (n – бүтүн сан, $n\neq-1$).

а) $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+4$; б) $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$;

в) $F(x)=x^{n+1}+C$; г) $F(x)=x^{n+1}+2$; д) $F(x)=\dfrac{x^n}{n+1}+C$.

99. $f(x)=3\sqrt{x+9}$.

а) $F(x)=3(x+9)^{\frac{3}{2}}+C$; б) $F(x)=3(x+9)^{\frac{3}{2}}+1$;

в) $F(x)=2(x+9)^{\frac{3}{2}}+1$; г) $F(x)=2(x+9)\sqrt{x+9}+C$;

д) $F(x)=2(x+9)\sqrt{x+9}+6$.

Төмөндө берилген f функциясы үчүн берилген чекитте берилген мааниге ээ болгон F баштапкы функцияны тапкыла (100–103):

100. $f(x)=6x+9$, $F(1)=15$.

а) $F(x)=3x^2+9x+1$; б) $F(x)=3x^2+9$;

в) $F(x)=3x^2+9x-1$; г) $F(x)=3x^2+9x+3$;

д) $F(x)=3x^2+12$.

101. $f(x)=2\sin x+3\cos x$, $F(\pi)=9$.

а) $F(x)=3\sin x+2\cos x+11$; б) $F(x)=3\sin x-2\cos x+10$;

в) $F(x)=3\sin x-2\cos x+7$; г) $F(x)=3\sin x-2\cos x+8$;

д) $F(x)=3\sin x-3\cos x+6$.

102. $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x^2}$, $F(1)=10$.

а) $F(x)=x^3-\dfrac{2}{x}+11$; б) $F(x)=x^3+\dfrac{2}{x}+7$;

в) $F(x)=x^3-\dfrac{2}{x}+4$; г) $F(x)=x^3+\dfrac{2}{x}+5$;

д) $F(x)=x^3-\dfrac{2}{x^2}+12$.

103. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}}$, $F(0)=9$.

а) $F(x)=\sqrt{x+9}+6$; б) $F(x)=3\sqrt{x+9}-3$;

в) $F(x)=\sqrt{x+9}+4$; г) $F(x)=2\sqrt{x+9}+4$;

д) $F(x)=2\sqrt{x+9}+3$.

Төмөндө берилген f функциясы үчүн графиги M чекити аркылуу өткөн F баштапкы функцияны тапкыла (104–107):

104. $f(x)=6x^2-4x+1$, $M(2;4)$.

а) $F(x)=2x^3+2x^2+x+1$; б) $F(x)=2x^3-2x^2+x+1$;

в) $F(x)=2x^3+2x^2+9$; г) $F(x)=2x^3-2x^2+x-6$;

д) $F(x)=2x^3-2x^2+x+6$.

105. $f(x)=3\cos3x-4\sin2x,\ M(\frac{\pi}{6};5)$.

а) $F(x)=\sin3x+2\cos2x+3$; б) $F(x)=\sin3x-2\cos2x+3$;

в) $F(x)=\sin3x+2\cos2x+4$; г) $F(x)=\sin3x-2\cos2x+4$;

д) $F(x)=\sin3x+4\cos2x+2$.

106. $f(x)=\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{4}{\sin^2 4x},\quad M(\frac{\pi}{4};2)$.

а) $F(x)=3\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+1$; б) $F(x)=\mathrm{tg}3x+2\mathrm{ctg}2x+3$;

в) $F(x)=\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+3$; г) $F(x)=\mathrm{tg}3x+2\mathrm{ctg}2x+4$;

д) $F(x)=\mathrm{tg}3x-2\mathrm{ctg}2x+4$.

107. $f(x)=4e^{2x}-2e^{-2x},\ M(0;1)$.

а) $F(x)=2e^{2x}-e^{-2x}$; б) $F(x)=2e^{2x}-e^{-2x}-1$;

в) $F(x)=2e^{2x}+e^{-2x}-2$; г) $F(x)=2e^{2x}+e^{-2x}+2$;

д) $F(x)=4e^{2x}-2e^{-2x}-1$.

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (108–116):

108. а) $\int(3x^5-2x^3+4x)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$; г) $\int\left(\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$;

д) $\int(6\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x})dx$; е) $\int(9x^2-2x+7)dx$.

109. а) $\int(4\cos x-2\sin x)dx$; б) $\int(7\sin x+3\cos x)dx$;

в) $\int(e^x-3\cos4x)dx$; г) $\int(3e^{-x}-4\sin x)dx$;

д) $\int(7+e^{-2x}+4\cos2x)dx$; е) $\int(3+4e^{2x}-6\sin\frac{1}{2}x)dx$.

110. а) $\int(6\sqrt[3]{2x}-\frac{4}{x}+5\cdot2^{-x})dx$; б) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-4e^{4x}\right)dx$;

в) $\int(x+2)^5dx$; г) $\int(x-2)^7dx$;

д) $\int\frac{4}{\sqrt{x-3}}dx$; е) $\int\frac{6}{\sqrt[4]{x+1}}dx$;

ж) $\int\left[\frac{2}{x+1}+5\cos(x+3)\right]dx$; з) $\int\left[\frac{2}{x-1}-3\sin(x-2)\right]dx$.

111. а) $\int\cos(4x+5)dx$; б) $\int\sin(3x+1)dx$;

в) $\int\cos(\frac{x}{3}+1)\,dx$; г) $\int(\sin\frac{x}{5}+2)dx$;

д) $\int e^{\frac{x+3}{2}}\,dx$; е) $\int e^{6x-7}\,dx$.

112. а) $\int e^{5x-2}\,dx$; б) $\int\frac{5}{4x-2}dx$;

в) $\int\frac{1}{3x}\,dx$; г) $\int(e^{2x}-3\cos4x)dx$;

д) $\int(e^{\frac{x}{5}}+3\sin3x)dx$; е) $\int(2\cos\frac{x}{4}-2e^{2x-\frac{1}{3}})dx$.

113. а) $\int\left[\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+6\cos(7x+2)\right]dx$; б) $\int\left[\sqrt{\frac{x}{3}}-2\sin(3x-1)\right]dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{3x-2}}+\frac{3}{2-x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}-\frac{5}{3x-4}\right)dx$;

д) $\int(6\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x})dx$; е) $\int(9x^2-2x+7)dx$.

114. а) $\int\frac{6x^5-4x^3+2x}{4}dx$; б) $\int\frac{5x^4+6x^2-4x+1}{6}dx$;

в) $\int(3+x)(2x-1)dx$; г) $\int(3x-2)(4+5x)dx$.

115. а) $\int(3x+2)\sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int(2x-1)\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int\frac{x+2}{\sqrt[4]{x}}dx$; г) $\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

д) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt[4]{x}}dx$; е) $\int\frac{x^2+x+3}{\sqrt[3]{x}}dx$.

116. а) $\int\sin x\cos x\,dx$; б) $\int(\sin x\cos2x-\cos x\sin2x)dx$;

в) $\int\sin3x\cos3x\,dx$; г) $\int(\sin4x\sin5x-\cos4x\cos5x)dx$.

Төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (117–124):

117. *а)* $\int\limits_0^2 xdx$ *б)* $\int\limits_0^1 x^2dx$; *в)* $\int\limits_{-1}^2 4xdx$; *г)* $\int\limits_1^2 3x^2dx$;

д) $\int\limits_1^3 \frac{1}{x}dx$; *е)* $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}dx$; *ж)* $\int\limits_1^9 \sqrt{x}dx$; *з)* $\int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

118. *а)* $\int\limits_0^{\ln 3} e^xdx$; *б)* $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin xdx$; *в)* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos xdx$; *г)* $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx$;

д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx$; *е)* $\int\limits_0^{\pi} (3\sin 2x - 2\cos 3x)dx$.

119. *а)* $\int\limits_{-2}^1 (3x-1)dx$; *б)* $\int\limits_{-1}^2 (4-3x)dx$;

в) $\int\limits_{-2}^2 (1-4x^2)dx$; *г)* $\int\limits_{-1}^1 (3x^2+2)dx$.

120. *а)* $\int\limits_0^1 (3x^2+2x+4)dx$; *б)* $\int\limits_{-1}^1 (6x^2-2x+1)dx$;

в) $\int\limits_0^9 (x-2\sqrt{x})dx$; *г)* $\int\limits_1^4 (2x-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$;

д) $\int\limits_0^3 e^{2x}dx$; *е)* $\int\limits_1^2 6e^{3x}dx$.

121. *а)* $\int\limits_0^3 x(x+1)(3x-2)dx$; *б)* $\int\limits_{-1}^0 (x+2)(x^2-1)dx$;

в) $\int\limits_1^2 (x+\frac{1}{x})^2dx$; *г)* $\int\limits_2^3 \frac{3}{x^2}(1+\frac{3}{x})dx$.

122. *а)* $\int\limits_1^3 \frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; *б)* $\int\limits_1^2 \frac{2x-1}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int\limits_0^5 \frac{7}{\sqrt{3x+1}}dx$; *г)* $\int\limits_2^7 \frac{9}{\sqrt{x+2}}dx$.

123. *а)* $\int\limits_{1}^{3} \frac{4}{3x-2}dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{1} \frac{3}{2x+1}dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin(3x - \frac{\pi}{4})dx$; *г)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x + \frac{\pi}{3})dx$.

124. *а)* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx$; *г)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x)dx$;

д) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}dx$; *е)* $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}dx$.

125. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\int\limits_{0}^{x} (2t - 3)dt \ge x - 3$; 2) $\int\limits_{1}^{x} (2t - 2)dt < 1$.

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (126–129):

126. *а)* $y = x^2 + 4x$ параболасы жана Ox огу;

б) $y = x^2 - 3x + 2$ параболасы жана Ox огу;

в) $y = (x+1)^2$ параболасы, $y = 1 - x$ түз сызыгы жана Ox огу.

127. *а)* $y = 4 - x^2$ параболасы, $y = x + 2$ түз сызыгы жана Ox огу;

б) $y = 4x - x^2$ параболасы, $y = 4 - x$ түз сызыгы жана Ox огу;

в) $y = 3x^2$ параболасы, $y = 1{,}5x + 4{,}5$ түз сызыгы жана Ox огу.

128. *а)* $y = \sqrt{x}$ менен $y = (x - 2)^2$ функцияларынын графиктери жана Ox огу;

б) $y = x^3$ менен $y = 2x - x^2$ функцияларынын графиктери жана Ox огу;

в) $y = \sqrt{x}$ функциянын графиги жана $y = x$ түз сызыгы.

129. *а)* $y=x^2+1$ параболасы жана $y=3-x$ түз сызыгы;

б) $y=(x+2)^2$ параболасы жана $y=x+2$ түз сызыгы;

в) $y=\sqrt{x}$ функциянын графиги жана $y=x^2$ параболасы.

130. Төмөнкү сызыктар менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла:

а) $y=3x^2+2,\ x=0,\ x=1,\ y=0;$ *б)* $y=2\sqrt{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0;$

в) $y=3\sqrt{x},\ x=4,\ y=0;$ *г)* $y=4-x^2,\quad y=0.$

Тест

I вариант.

1. $f(x)=x^2-\sin 2x$ функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\cos 2x+C;$ *б)* $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{\cos 2x}{2}+C;$

в) $F(x)=-\dfrac{\cos 2x}{2}+C;$ *г)* $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C;$

д) $F(x)=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C.$

2. $f(x)=\sqrt{3x-1}$ функциянын $(\dfrac{1}{3};\infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C;$ *б)* $F(x)=\dfrac{2}{3}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C;$

в) $F(x)=\dfrac{1}{3}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C;$ *г)* $F(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}+C;$

д) $F(x)=\dfrac{2}{3\sqrt{3x-1}}+C.$

3. $f(x)=\dfrac{6}{(4-3x)^2}$ функциянын $F(1{,}5)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\dfrac{2}{(3x-4)^2}-1{,}5;$ *б)* $F(x)=\dfrac{2}{4-3x}+5;$

в) $F(x)=\dfrac{2}{3x-4}-3;$ *г)* $F(x)=\dfrac{4}{(4-3x)^2}+3;$

д) $F(x)=\dfrac{2}{4-3x}+3.$

4. $f(x)= 3x^2-2x+4$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=1$ болсо, анда $F(1)$ ди тапкыла.

а) 0,5; *б)* 2; *в)* 3,5; *г)* 5; *д)* 6,5.

5. $f(x)=\cos x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=$ $=F(x)+C-f'(x)$ жана $g(0)=2$ болгондогу $g(x)=0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; *б)* $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; *в)* $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;

г) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; *д)* $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

6. Материалдык чекит координат түз сызыгы менен $a(t)=2t+3$ ылдамданууда кыймылдасын жана $v(1)=5$, $s(0)=3$ болсун. $s(1)$ ди тапкыла.

а) $\frac{35}{6}$; *б)* $\frac{40}{6}$; *в)* $\frac{45}{6}$; *г)* $\frac{50}{6}$; *д)* 10.

7. $f(x)=2x+4$, $F(0)=3$ үчүн $\begin{cases} F(x)<0 \\ F'(x)\ge 0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

а) $(-3;-1)$; *б)* $(-2;-1)$; *в)* $[-3;-1)$; *г)* $(-2;-1]$;

д) $[-2;-1)$.

8. $\int\limits_{-2}^{2}(x^2-4x+3)dx$ интегралын эсептегиле

а) $\frac{52}{3}$; *б)* $\frac{20}{3}$; *в)* $\frac{23}{3}$; *г)* $\frac{26}{3}$; *д) интеграл жашабайт.*

9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(4x-1)^3}dx$ интегралын эсептегиле.

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д) интеграл жашабайт.*

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\,dx$ интегралын эсептегиле.

а) -2; *б)* -1; *в)* 0; *г)* 1; *д)* 2.

11. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{5x+4}\,dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{38}{15}$; *б)* $\frac{41}{15}$; *в)* $\frac{44}{15}$; *г)* $\frac{47}{15}$; *д)* $\frac{50}{15}$.

12. $y=-x^2+3x-2$ функциянын графиги жана $y=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\frac{7}{6}$; *б)* $\frac{10}{6}$; *в)* $\frac{1}{6}$; *г)* $\frac{8}{3}$; *д)* $\frac{19}{6}$.

13. $\int\limits_x^{2x}(1-2t)dt=4x$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\{1;\ 0\}$; *б)* $\{-1;\ 1\}$; *в)* $\{1;\ 2\}$; *г)* $\{-1;\ 2\}$; *д)* $\{-1;\ 0\}$.

14. $\int\limits_0^2 e^{0,5x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{1}{2}(e-1)$; *б)* $(e-1)$; *в)* $2(e-1)$; *г)* $3(e-1)$; *д)* $4(e-1)$.

15. $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларынын графиктери жана $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\sqrt{2}-1$; *б)* $\sqrt{2}$; *в)* $\sqrt{2}+1$; *г)* 2; *д)* 1.

16. $y=x\sqrt{x}$ функциянын графиги, $x=1$, $x=2$, $y=0$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны $0x$ огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла.

а) $\frac{3\pi}{2}$; *б)* $\frac{9\pi}{4}$; *в)* 3π; *г)* $\frac{15\pi}{4}$; *д)* $\frac{9\pi}{2}$.

II Вариант.

1. $f(x)=x^2+\cos 3x$ функциянын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\sin 3x+C$; *б)* $F(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{\sin 3x}{2}+C$;

в) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{\sin 3x}{3}+C$; *г)* $F(x)=3x^2-\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

д) $F(x)=x^3-\frac{1}{2}\sin 3x+C$.

2. $f(x)=\sqrt{4x-1}$ функциянын $(\frac{1}{4};\ \infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{1}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$; б) $F(x)=\frac{1}{6}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$;

в) $F(x)=\frac{1}{2}(4x-1)\sqrt{4x-1}+C$; г) $F(x)=\frac{1}{4\sqrt{4x-1}}+C$;

д) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x-1}}+C$.

3. $F(x)=\frac{4}{(5-2x)^2}$ функциянын $F(1,5)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\frac{4}{5-2x}-1$; б) $F(x)=\frac{4}{2x-5}+3$;

в) $F(x)=\frac{2}{2x-5}$; г) $F(x)=\frac{2}{2x-5}+2$;

д) $F(x)=\frac{2}{5-2x}$.

4. $f(x)=3x^2-4x+3$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=2$ болсо, анда $F(1)$ ди тапкыла

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6.

5. $f(x)=\sin x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=F(x)+C-f'(x)$ жана $g(\frac{\pi}{2})=2$ болгондогу $g(x)=0$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $2n\pi,\ n\in Z$; б) $n\pi,\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$;

г) $\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$; д) $-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$.

6. Материалдык чекит координат түз сызыгы менен $a(t)=3t+2$ ылдамданууда кыймылдасын жана $v(1)=4$, $s(0)=2$ болсун. $s(1)$ ди тапкыла.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

7. $f(x)=2x+6$, $F(0)=5$ үчүн $\begin{cases} F(x)<0 \\ F'(x)>0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

а) $(-5;\ -3)$; б) $[-5;\ -3)$; в) $(-3;\ -1)$; г) $(-5;\ -1)$;

д) $(-5;\ -1]$.

8. $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx$ интегралын эсептегиле.

а) 2; б) 4; в) 6; г) 8; д) *интеграл жашабайт.*

9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(3x-1)^2}dx$ интегралын эсептегиле.

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) *интеграл жашабайт.*

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x dx$ интегралын эсептегиле.

а) −2; б) −1; в) 0; г) 1; д) 2.

11. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{9-5x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{32}{15}$; б) $\frac{7}{3}$; в) $\frac{38}{15}$; г) $\frac{41}{15}$; д) $\frac{44}{15}$.

12. $y=-x^2+4x-3$ функциянын графиги жана $y=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{11}{6}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{4}{3}$.

13. $\int\limits_{x}^{2x}(2-2t)dt=5x$ теңдемесин чыгаргыла.

а) $\{-1; 0\}$; б) $\{-1; 13\}$; в) $\{2; -1\}$; г) $\{2; 0\}$; д) $\{-1; 3\}$.

14. $\int\limits_{0}^{3}e^{\frac{1}{3}x}dx$ интегралын эсептегиле.

а) $\frac{1}{3}(e-1)$; б) $\frac{1}{2}(e-1)$; в) $e-1$; г) $2(e-1)$; д) $3(e-1)$.

15. $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларынын графиктери жана $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

а) 3; б) 2; в) $3-\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{2}$; д) $\sqrt{2}-1$.

16. $y=x\sqrt{x}$ функциянын графиги $x=2$, $x=3$, $y=0$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны Ox огунун

айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла.

а) $\frac{61}{4}\pi$; б) $\frac{65}{4}\pi$; в) $\frac{69}{4}\pi$; г) $\frac{73}{4}\pi$; д) $\frac{77}{4}\pi$.

III Вариант.

1. $f(x)=x^3-\sin 4x$ функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos 4x+C$; б) $F(x)=x^4+\cos 4x+C$;

в) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\cos 4x+C$; г) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x+C$;

д) $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x+C$.

2. $f(x)=\sqrt{2x-1}$ функциянын $(\frac{1}{2};\infty)$ интервалындагы F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $F(x)=\frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$; б) $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$;

в) $F(x)=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$; г) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}+C$;

д) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+C$.

3. $F(x)=\frac{4}{(3-2x)^2}$ функциянын $F(1)=1$ шартын канааттандырган F баштапкы функциясын тапкыла.

а) $F(x)=\frac{2}{3-2x}-1$; б) $F(x)=\frac{3}{3-2x}-2$;

в) $F(x)=-\frac{1}{3-2x}+2$; г) $F(x)=-\frac{2}{3-2x}+3$;

д) $F(x)=\frac{1}{3-2x}$.

4. $f(x)=3x^2-4x+1$ функциянын F баштапкы функциясы үчүн $F(0)=3$ болсо, анда $F(-1)$ ди тапкыла

а) -1; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3.

5. $f(x)=\cos x$ функциянын баштапкы функциясы $F(x)+C$, $g(x)=F(x)+C-2f'(x)$ жана $g(0)=-3$ болгондогу $g(x)=-4$ тендемесин чыгаргыла.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; в) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

Ч ы г а р у у: $\log_{64}128 = x$ деп белгилеп алабыз. Логарифманын аныктамасы боюнча $64^x = 128$. $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ болгондуктан, $2^{6x} = 2^7$, мындан $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Жообу: $\log_{64}128 = \frac{7}{6}$.

4-м а с е л е. $7^{-3\log_7 9}$ ни эсептегиле.

Ч ы г а р у у: Даражанын касиети жана негизги логарифмалык теңдештикти пайдалансак $7^{-3\log_7 9} = \left(7^{-3\log_7 9}\right)^{-3} = 9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$.

Жообу: $7^{-3\log_7 9} = \frac{1}{729}$.

5-м а с е л е. $\log_5 (7 - 2x) = 3$ теңдемесин чыгаргыла.

Ч ы г а р у у: Логарифманын аныктамасы боюнча $5^3 = 7 - 2x$, мындан $2x = -(125 - 7) = -118$ же $x = -59$.

Жообу: $x = -59$.

6-м а с е л е. x тин кандай маанилери үчүн $\log_3 \frac{x-1}{2-x}$ мааниге ээ боло алат.

Ч ы г а р у у: Логарифманын негизи $3 > 0$ жана $3 \neq 1$ болгондуктан, берилген логарифма качан $\frac{x-1}{2-x} > 0$ болгон учурда гана мааниге ээ боло алат.

Бул барабарсыздыкты чыгарып, $1 < x < 2$ болоорун табабыз.

Эске алгыла. Логарифмаларды биз көптөгөн турмуштук маселелерди чыгарууда колдонобуз. Мисал катары төмөнкү маселени карап кетели.

Бизге белгилүү болгондой радийдин ажыроосу болжол менен

$$m(t) = m(0) \cdot (0,9996)^t$$

формуласы аркылуу аныкталат, мында $m(0)$ – радийдин *грамм* менен өлчөнгөн алгачкы саны, ал эми $m(t)$ – анын (бул дагы *грамм* менен) t жылдан кийинки саны. Жарым ажыроо мезгили, б. а. радийдин саны канча жылдан кийин эки эсеге азаярын тактагыла.

Издеген t жыл

$$m(0) \cdot (0,9996)^t = 0,5\, m(0)$$

теңдемесинин тамыры болуп эсептелет же

$$(0,9996)^t = (0,5)$$

Ошондуктан

$$t = \log_{0,9996} 0,5.$$

Кийинчерээк силер, атайын түзүлгөн таблицанын же калькулятордун жардамы менен мындай логарифмаларды эсептөөнү үйрөнүп аласыңар, азырынча

$$\log_{0,9996}0,5 \approx 1600$$

экендигине ишенип, аны чындык катары кабыл ала туралы. Мына ошентип радийдин саны болжол менен ар бир 1600 жыл сайын эки эсе азайып турат.

Көнүгүүлөр

Эсептегиле (20–24):

21. *а*) $\log_2 4$; *д*) $\log_2 64$; *з*) $\log_{0,5} 0,5$;

б) $\log_4 4$; *е*) $\log_{0,5} 4$; *и*) $\log_{0,5} 0,25$;

в) $\log_2 8$; *ё*) $\log_{0,5} 8$; *к*) $\log_2 1$;

г) $\log_2 32$; *ж*) $\log_{0,5} 32$; *л*) $\log_2 \frac{1}{8}$.

22. *а*) $\log_3 27$; *в*) $\log_3 \frac{1}{3}$; *д*) $\log_3 \frac{1}{9}$;

б) $\log_3 81$; *г*) $\log_3 1$; *е*) $\log_4 \frac{1}{16}$.

23. *а*) $\log_6 665$; *в*) $\log_5 \frac{1}{125}$; *д*) $\log_{\frac{1}{3}} 27$;

б) $\log_6 216$; *г*) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; *е*) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$.

24. *а*) $3^{\log_3 18}$; *г*) $3^{5\log_3 2}$; *ё*) $8^{\log_2 5}$;

б) $5^{\log_5 16}$; *д*) $\frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$; *ж*) $9^{\log_3 12}$;

в) $10^{\log_{10} 2}$; *е*) $\frac{1}{2}^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; *з*) $16^{\log_4 7}$.

25. x санын тапкыла:

а) $\log_6 x = 3$; *г*) $\log_3 (x+2)=3$;

б) $\log_5 x = 4$; *д*) $\log_{\frac{1}{4}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$;

в) $\log_2 (5 - x) = 3$; *е*) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x)=-1$.

26. x тин кайсы маанилеринде төмөнкү туюнтмалар мааниге ээ:

а) $\log_3 (12 - x)$;
б) $\log_2 (x - 12)$;
в) $\log_{\frac{1}{4}} (-x)$;
г) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{6}{2x-1}\right)$;
д) $\log_6 (49 - x^2)$;
е) $\log_7 (x^2 + x - 6)$;
ё) $\log_{36} \frac{2x+4}{x-3}$;
ж) $\log_6 \frac{4-x}{3x+5}$.

27. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $2^x = 5$;
б) $1{,}2^x = 4$;
в) $4^{2x+3} = 5$;
г) $7^{1-2x} = 2$;
д) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$;
е) $9^x - 3^x - 12 = 0$.

Суроолор

1. Сандын логарифмасы деген түшүнүк эмне үчүн киргизилген?
2. Берилген негизи боюнча берилген сандын логарифмасы кантип аныкталат?
3. Сандын логарифманын аныктамасында эмне үчүн $a>1$ жана $a\neq 1$ деген шарттарды сактайбыз ?
4. Негизги логарифмалык теңдештик кайдан келип чыгат?
5. Логарифмалоо деп эмнени түшүнөбүз?
6. $\log_5 (-8)$ жана $\log_3 (0)$ деген туюнтмалар мааниге ээ болушабы?

§ 4. Логарифманын негизги касиеттери

Логарифманы камтыган туюнтмаларды кайра өзгөртүүлөрдө, эсептөөлөрдө жана теңдемелерди чыгарууда логарифманын касиеттерин чагылдырган эрежелер тез-тез колдонулуп турат. Мейли $a > 0$, $a\neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ жана n – каалагандай чыныгы сан болсун. Анда логарифманын негизги касиеттерин чагылдырган

$$\log_a(bc)=\log_a b + \log_a c, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b - \log_a c, \qquad (2)$$

$$\log_a b^n=n \log_a b \qquad (3)$$

эрежелер орун алат.

Негизги логарифмалык теңдештик боюнча болсо

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c \,. \qquad (5)$$

1) (4) жана (5) барабардыктарын өз ара көбөйтсөк

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc).$$

(1) формуласы далилденди. Бул логарифманын *көбөйтүндүнүн логарифмасы көбөйтүүчүлөрдүн логарифмаларынын суммасына барабар* деген касиетин туюнтат.

2) (4) жана (5) барабардыктарын бөлсөк

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча (2) формуласы келип чыгат. Ал *бөлчөктүн логарифмасы алардын логарифмаларынын айырмасына барабар* деп айтылган касиетин берет.

3)

$$a^{\log_a b} = b$$

негизги логарифмалык теңдештикти көрсөткүчү n болгон даражага көтөрүп

$$a^{n \log_a b} = b^n$$

туюнтмасын алабыз, мындан логарифманын аныктамасы боюнча (3) формуласы келип чыгат. Бул *даражанын логарифмасы даража көрсөткүчүн анын негизинин логарифмасына көбөйткөн көбөйтүндүсүнө барабар* деген касиетин туюнтат.

Ошентип, логарифманын касиеттери боюнча көбөйтүү, бөлүү жана даражага көтөрүү амалдары камтылган туюнтмаларды *логарифмалап* алууга болот жана тескерисинче логарифмасы боюнча кайра туюнтманын өзүн же санды табууга болот. Мындай амал *потенцирлөө* деп аталат.

Маселен, $\dfrac{n^3\sqrt{b}}{c^2\ \sqrt[5]{k}}$ сыяктуу туюнтманы a негизи боюнча логарифмалоо талап кылынса (n, b, c, k – оң сандар), анда логарифмалоо эрежелери боюнча $\log_a \dfrac{n^3\sqrt{b}}{c^2\ \sqrt[5]{k}} = 3\log_a n + \dfrac{1}{2}\log_a b - 2\log_a c - \dfrac{1}{5}\log_a k$ болот.

Тескерисинче, ошол эле (1) – (3) формулаларды колдонуп санды эсептеп алууга да болот. Маселен:

б) $\lg(x^2+x+4)<1$; *д)* $9^{x+1}-3^{x+3}<3^x-3$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)\le 2$; *е)* $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\le 0$.

12. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-2y^2-8=0;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1,\\ \log_2(xy)=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2^x+2^y=12,\\ x-y=1;\end{cases}$ *д)* $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=144,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\ 2^y\cdot 3^x=18;\end{cases}$ *е)* $\begin{cases}\log_3(2x+y^2)=1,\\ 2^{x+y^2}-4=0.\end{cases}$

13. Теңдемени чыгаргыла жана берилген аралыктагы тамырларын тапкыла:

а) $\mathrm{ctg}5x=\mathrm{ctg}2x$, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin 3x+\sin x=2\sin 2x$, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

в) $\cos 7x=\cos 5x+\sin x$, $(-20°;\ 0°)$;

г) $\mathrm{tg}3x=\mathrm{tg}x$, $(135°;\ 180°)$;

д) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$, $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$;

е) $\sin x(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x$, $(0;\pi)$.

14. Теңдемени чыгаргыла жана анын берилген аралыктагы ар түрдүү тамырларынын санын тапкыла:

а) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $(-90°,\ 0°)$;

б) $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=4-2\sin^2 2x$, $[0;\pi]$.

Көрсөтмө. Теңдемелердин жалпы чыгарылыштарын таап, анын берилген аралыктарга тиешелүү тамырларын бөлүп алуу керек.

15. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sin x+\cos x>-\sqrt{2}$; *г)* $\sin x+\sqrt{3}\cos x<0$;

$\leq x \leq x_0 + \varepsilon$ барабарсыздыктарына эквиваленттүү. Модулдун бул касиетин пайдалансак, анда (C_2) системасынан, анын

$$\begin{cases} -1 \leq y-2 \leq 1, \\ -1 \leq y-3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq 3, \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq y \leq 3$$ чыгарылышына ээ

болобуз. Биз $y=\sqrt{x-1}$ деп белгилегенбиз. Муну эске алсак, $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ барабарсыздыгын алабыз. Бизге белгилүү: эгерде $a \leq b \leq c$ барабарсыздыгы $a>0$ болгондо орун алса, анда ал $a^2 \leq b^2 \leq$ $\leq c^2$ барабарсыздыгына эквиваленттүү. Демек, $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ барабарсыздыгынан $2^2 \leq x-1 \leq 3^2 \Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9$ же 1 ди барабарсыздыктын үч жагына тең кошуп, $5 \leq x \leq 10$ чыгарылышын алабыз. Биз эквиваленттүү гана өзгөртүүлөрдү жүргүздүк, ошондуктан берилген теңдеменин чыгарылышы чексиз көп экенин, б.а. $x \in [5; 10]$ болорун алабыз.

Жообу: $x \in [5; 10]$

61-мисалдагы теңдеме үчүн x тин [5; 10] сегментиндеги ар кандай мааниси тамыр боло алат. Теңдеменин тамыры $x \in [5; 10]$ болгонун себеби, берилген теңдемеден ага эквиваленттүү (M) модулду камтыган теңдемени алдык. Ал эми модулду камтыган теңдемелердин тамырлары жок, чектүү санда, чексиз көп болушу мүмкүн. Биз буга атайын 4 параграфында токтолобуз.

12. **Параметрлүү иррационалдык теңдемелер.**

Иррационалдык теңдемеде белгисизден башка бир же андан көп параметрлер болушу мүмкүн. Теңдеменин чыгарылышы бар же жок экенин теңдемедеги параметрге же параметрлерге анализ жүргүзүп аныктоого болот.

Параметрлүү теңдемелердин түрлөрү ар кандай жогоруда биз караган 11 түрүндө же алардан да башка болушу мүмкүн. Мындай теңдемелерди чыгарууда жогоруда биз колдонгон методдор колдонулушу мүмкүн.

Биз жогоруда (7-мисалда) бир параметрлүү теңдеменин жөнөкөй бир түрүн караганыбызды эске түшүрөлү. Төмөндө параметрлүү иррационалдык теңдемелерди чыгаруунун айрым мисалдарына токтололу.

62-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, мында, a – параметр.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин x белгисизине жана a параметрине карата АО: $x \geq 0$, $a+x \geq 0$, $a \geq \sqrt{a+x}$ барабарсыздыктар системасынан аныкталат. Мындан $x \geq 0$, $a \geq 0$, $a^2 \geq a+x$, б. а. АО: $0 \leq x \leq a^2 - a$, эгерде $a \geq 1$ болсо, $x=0$, эгерде $a=0$ болсо. Эми берилген теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөлү (б.а. ДК методун колдонолу). Анда $a-\sqrt{a+x}=x^2$, б. а.

$$\sqrt{a+x} = a - x^2 \qquad (T_1)$$

теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин АО:

$$a - x^2 \ge 0,\ x^2 \le a. \qquad (a)$$

(T_1) теңдемесине жаңы белгисизди кийирүү методун колдонолу: $t=\sqrt{a+x}$. Анда төмөнкү теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} t = a - x^2 \\ t^2 = a + x. \end{cases} \qquad (C_3)$$

Бул системанын экинчи теңдемесинен биринчисин кемитсек, $t^2 - t = x + x^2$, $x^2 - t^2 + x + t = 0 \Rightarrow (x+t)(x-t+1)=0 \Rightarrow x+t=0$, $x - t+1=0$ теңдемелеринин жыйындысына ээ болобуз. Анда (C_3) системасынын бир теңдемесин, тагыраак айтканда биринчи теңдемесин эсепке алып, төмөнкү теңдемелер системасынын жыйындысына келебиз: $\begin{cases} x + t = 0, \\ a - x^2 = t \end{cases}$ жана $\begin{cases} x - t + 1 = 0, \\ a - x^2 = t. \end{cases}$ Бул системалардын биринчисинин чыгарылышы (a) шартын канааттандырбайт. Ал (a) шартын канааттандырган чыгарылышты экинчи системадан алабыз: $\begin{cases} x - t + 1 = 0, \\ x^2 + t - a = 0. \end{cases}$ Бул эки теңдемени кошсок, анда $x^2 + x+1- a = 0$ квадраттык теңдемеси келип чыгат. Мындан $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, $a \ge 1$. Бул тамыр (a) шартын канааттандырат. (Муну x^2 ты таап, a ны чамалап оңой эле текшерсе болот).

Жообу: $x=0$, эгерде $a=0$ болсо; $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, эгерде $a \ge 1$ болсо.

63-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$, мында a, b – параметрлер.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин x, a, b га карата АО: $b \ge 0$, $a+x \ge 0$, $a - x \ge 0$, $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \ne 0$. Мындан $a \ge 0$, $-a \le x \le a$. Ал эми $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \ne 0$ дөн $x \ne 0$ келип чыгат. Анда $a > 0$. Ошондой эле берилген теңдеменин сол жагынын алымы > 0. Мындан $b \ne 0$ б.а. $b > 0$. Эми берилген теңдемени пропорция деп эсептеп $\left(\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{b}}{1}\right)$, параметр $b \ne 1$ деп эсептеп, пропорциянын 2) туунду пропорциясын пайдаланалы: $\dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=$

$=\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}$, $\quad \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}$. Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, алынган $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2}$ теңдемесин пропорция деп эсептеп, аны 3) туунду пропорция түрүнө келтирели. Анда $\dfrac{(a+x)-(a-x)}{(a+x)+(a-x)}=\dfrac{(\sqrt{b}+1)^2-(\sqrt{b}-1)^2}{(\sqrt{b}+1)^2+(\sqrt{b}-1)^2}$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{2\sqrt{b}}{b+1}$ сызыктуу теңдемесине келебиз жана $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ тамырын табабыз. Эгерде $\dfrac{2\sqrt{b}}{b+1}\le$ ≤ 1 экенин эске алсак, анда $x\le a$. Демек, бул табылган тамыр берилген теңдеменин АОсуна кирет.

Эми $b=1$ десек, анда берилген теңдемеден $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$. Бул теңдемеден $\sqrt{a-x}=0$, б. а. $x=a$ тамырын табабыз. Ал эми бул тамыр $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ ден $b=1$ болгондо келип чыгат.

Жообу: $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$, $a>0$, $b>0$.

Э с к е р т у ү! 62-, 63-мисалдар айтып тургандай, параметрлүү иррационалдык теңдемелерди чыгаруу көп билимди, терең анализ жүргүзүүнү талап кылат.

Дагы бир мисал келтирели.

64-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$, мында a – параметр.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x\in R$, $a\in R$. Демек, x белгисизи менен a параметрин тең укуктуу деп карасак болот. Ошондуктан берилген теңдемени a параметрине карата теңдеме деп эсептейли жана ага ДК методун колдонобуз (эки жагын тең бешинчи даражага көтөрөбүз). Анда $(a^5+x)^5=a-x \Rightarrow a=x+(a^5+$ $+x)^5$ теңдемесине келебиз. Эгерде $f(a)=x+a^5$ десек, анда бул теңдеме $f(f(a))=a$ түрүнө келет. Эми бул теңдемеге суперпозиция методун, б. а. 2-теореманы колдонолу. Демек, алынган теңдеме $f(a)=a$ теңдемесине эквиваленттүү, б. а. $a=a^5+x$ теңдемесине эквиваленттүү. Ал эми бул теңдеме x ке карата жөнөкөй сызыктуу теңдеме. Демек, $x=a-a^5$ берилген теңдеменин тамыры болот.

Жообу: $x=a-a^5$.

Э с к е р т у у! 64-мисалда параметрге карата чыгаруу методун колдондук.

Суроолор

1) Кандай теңдемени иррационалдык теңдеме дейбиз?

2) Иррационалдык теңдеме менен рационалдык теңдеменин айырмасы эмнеде?

3) Иррационалдык теңдеменин кандай түрлөрүн билесиңер?

4) Иррационалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн кандай негизги методдор колдонулат?

5) Теңдемени даражага көтөрүү методунун мазмуну эмнеде?

6) Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методу эмнеге негизделген?

7) Теңдемелердин жыйындысы менен системасынын айырмасы эмнеде?

8) Суперпозиция методу эмнеге негизделген?

9) Кандай методду функционалдык метод дейбиз?

10) График методу эмнеге негизделген?

11) Пропорциянын кандай касиеттерин иррационалдык теңдемелерди чыгарууга колдонсо болот?

12) Татаал радикалдуу иррационалдык теңдемелерди кантип чыгарса болот?

Көнүгүүлөр

29. Теңдеменин тамыры жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x} = -x^2-10;$ *г)* $\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x-1}=1;$

б) $\sqrt[4]{x-5}=-7;$ *д)* $\sqrt{2x+5}+\sqrt[6]{x+2}=0;$

в) $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x}=-4;$ *е)* $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x+5}=2.$

30. Теңдеменин тамыры жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt[3]{x-4}-\sqrt{-1-x}=0;$ *г)* $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4}=(x-1)^2(x-8);$

б) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[4]{-x}-1;$ *д)* $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{x-2}=(x-1)^2(x-6);$

в) $\sqrt[10]{x}=-x^2+8x-15;$ *е)* $\sqrt{x^2-x-2}=\cos\pi.$

31. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-3}=4;$ *б)* $\sqrt[3]{2-x}=-1;$

в) $\sqrt[4]{x^2-1}=2;$ *д)* $\sqrt[8]{x+9}=2;$

г) $\sqrt[6]{x-5}=3;$ *е)* $\sqrt[5]{x-4}=-2.$

32. Теңдеме a параметринин кайсы маанилеринде чыгарылышка ээ? Чыгарылышын жазгыла:

а) $\sqrt{x} = 2a - 3$; *г)* $\sqrt{t+1} = 9a - a^2 - 8$;

б) $\sqrt[3]{x-8} = 1 - a^2$; *д)* $\sqrt{x+9} = |12 - a - a^2|$;

в) $\sqrt[4]{x} = \dfrac{1-a^3}{1+a^2}$; *е)* $\sqrt[6]{2x-1} = \dfrac{4-a^2}{3a^2-4a+1}$.

33. Теңдеменин аныкталуу облусун тапкыла:

а) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2} = x^3 - 5x + 12$; *г)* $\sqrt[4]{|2x-7|} + \sqrt[3]{-x+6} = 8$;

б) $\sqrt[3]{x-x^4} + \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{12-x}} = -x+1$; *д)* $\sqrt{x-8} + \sqrt[4]{2-x} = 42x$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{5-x}} - \sqrt[5]{x^2-9x+11} = x^2 - 7$; *е)* $\sqrt[8]{2x-1} - \sqrt{1-2x} = x - \dfrac{1}{2}$.

34. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-1} - 2\sqrt{1-x} = x - 2$;

б) $\sqrt{x-4} + \sqrt{(x^2+1)(4-x)} = x^3 - 15x - 4$;

в) $\sqrt[3]{x^3-8} + \sqrt{x-2} - \sqrt[6]{(x^2+9)(2-x)} = -x^2 + 9x - 14$;

г) $\sqrt{9-x} - \sqrt{27-3x} = 27 - 3x$;

д) $\sqrt[4]{3-x} - \sqrt{x-3} = 2$;

е) $\sqrt{9-3x} + \sqrt{x-3} = 2x^2 - 1$.

Көрсөтмө: Аныкталуу облусун табуу методун колдонгула.

35. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x + 3\sqrt{x-5} = 5$; *г)* $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$;

б) $\sqrt{10-x} = 4 - x$; *д)* $\sqrt{4-6x-x^2} = x + 4$;

в) $\sqrt{x-1} = x - 3$; *е)* $\sqrt{2x-1} = x - 2$.

36. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-1} + x - 3 = 0$; *г)* $\sqrt{x^2+20} + x^2 = 22$;

б) $\sqrt{x^4-2x-5} = 1 - x$; *д)* $\sqrt[3]{2x-1} = 3$;

в) $x^2 + 11 + \sqrt{x^2+11} = 42$; *е)* $\sqrt[4]{x-3} = 2$.

Көрсөтмө: б) Биквадраттык теңдемеге келтирилет; *в*) $t=\sqrt{x^2+11}$ деп белгилегиле; *г*) $t=\sqrt{x^2+20}$ деп алуу керек.

37. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$;

б) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;

в) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;

г) $\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=5$;

д) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

е) $\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}$.

38. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}$;

б) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$;

в) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$;

г) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

д) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$;

е) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

Көрсөтмө: б) сол жагын орток (жалпы) бөлүмгө келтиргиле.

39. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}\,\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$;

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}+\sqrt{9x+4}=\sqrt{8x+9}$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$;

д) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

е) $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}$.

40. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-17}=1$;

б) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$;

в) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x-5}$;

г) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$;

д) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

е) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

41. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$; в) $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\cdot\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}}=7$;

б) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$; г) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

Көрсөтмө: г) $u>0$ болсо, $u+\dfrac{1}{u}\geq 2$ болорун колдонгула.

42. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{6}}=18$; в) $\sqrt{x+13}+\sqrt[4]{x+13}=12$;

б) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; г) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

43. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; г) $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2}$;

б) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$; д) $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}=x$;

в) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$; е) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

Көрсөтмө: Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методун колдонсо болот. Теңдеменин АОсун сөзсүз табуу керек.

44. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2\cdot\sqrt{\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{3}}=3x$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=x-3$; в) $2\sqrt{1+2\sqrt{x}}=x-1$.

Көрсөтмө: Суперпозиция методун колдонгула;

а) $f(x)=\dfrac{1}{3}(2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})$; в) $f(x)=1+2\sqrt{x}$.

45. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{16+x^2}=4-89x^4$; в) $\sqrt{5+x^2}+\sqrt{x-2}=\dfrac{6}{x}$;

б) $\sqrt{9+x}+\sqrt[6]{x-1}=3$; г) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{x}=3$.

Көрсөтмө: Функционалдык методду колдонгула;

в) 3-теореманы пайдалангыла; *б), г)* АОдо сол жактары ↗.

46. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x}=2x^2-1$; *в)* $x^5+x=\sqrt[3]{x-7}$;

б) $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$; *г)* $\sqrt{x}=x^2+1$.

Көрсөтмө: График методун пайдалангыла.

47. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$; *в)* $\dfrac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$; *г)* $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$,

a – параметр.

Көрсөтмө: Пропорция методун пайдалансаңар болот.

48. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{2+\sqrt{19-\sqrt[3]{x}}}=3$; *в)* $\sqrt[5]{4-\sqrt{23+\sqrt[4]{x-9}}}=-1$;

б) $\sqrt{9-\sqrt{30-\sqrt{20+\sqrt{10x-25}}}}=2$; *г)* $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

Көрсөтмө: Татаал радикалдуу иррационалдык теңдемелерди чыгаруу методун колдонгула.

49. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2+7x+2\sqrt{x}+11=0$; *в)* $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=3$;

б) $x^4-2x^2+x-2\sqrt{x}+2=0$; *г)* $x^2-4x+y-6\sqrt{y}+13=0$,

x, y – белгисиздер.

Көрсөтмө: Толук квадратты бөлүп алуу методун пайдалангыла.

50. Теңдемени чыгаргыла (a – параметр):

а) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$; *в)* $\sqrt{x^2-1}=9-8a-a^2$;

б) $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\dfrac{x}{2a}$; *г)* $\sqrt[3]{x-4}=12-11a-a^2$.

Көрсөтмө: б) Пропорция методун колдонсоңор болот.

51. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

$$x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0.$$

52. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{x^2+32}-2\cdot\sqrt[4]{x^2+32}=3.$$

53. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$$

54. Төмөнкү теңдемеден $\sqrt{x}$ ти тапкыла: $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8.$

Тест

55. Теңдеме a параметринин кайсы маанилеринде чыгарылышка ээ?

$$\sqrt{x-5}=\frac{(a+1)(3-a)}{(a-4)(a-5)}.$$

а) R; *б*) $[-1; 3]\cup[5; \infty)$; *в*) $[1; 3]\cup[4; 5]$; *г*) $[-1; 3]\cup[4; 5]$; *д*) R_+.

56. Теңдемени чыгаргыла: $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12.$

а) $\{-7; -2; 8\}$; *б*) $\varnothing$; *в*) -7; *г*) 8; *д*) $\{-7; 8\}$.

57. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6.$$

а) -15; *б*) -14; *в*) -6; *г*) 1; *д*) 7.

58. Теңдемени чыгаргыла: $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}+x}+\sqrt{3\sqrt{2}-x}}{\sqrt{3\sqrt{2}+x}-\sqrt{3\sqrt{2}-x}}=\sqrt{2}.$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

59. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34.$$

а) -3; *б*) -9; *в*) 0; *г*) 9; *д*) 12.

Көрсөтмө: Адегенде тамырларын, анан алардын көбөйтүндүсүн тапкыла:

60. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3.$$

а) 0; *б*) 1; *в*) 3; *г*) 5; *д*) 8.

61. Теңдеменин тамырларынын катышын тапкыла:

$$\frac{\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}}{\sqrt{20+x}-\sqrt{20-x}}=\frac{20}{x}.$$

а) 1; *б*) 0; *в*) – 1; *г*) 2; *д*) 3.

62. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23).$$

а) –5; *б*) –4,5; *в*) 0; *г*) – 4, 8; *д*) – 4.

63. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4.$$

а) – 3; *б*) – 2; *в*) – 1; *г*) 1; *д*) 2.

64. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла: $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$.

а) – 3; *б*) 1; *в*) 2; *г*) 3; *д*) 4.

65. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

66. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$x-2=\sqrt[3]{x^2-8}.$$

а) 3; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 6; *д*) 7.

67. Теңдеменин тамырын тапкыла: $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$.

а) 50; *б*) 60; *в*) 61; *г*) 62; *д*) 78.

68. Теңдеменин тамырынын модулун тапкыла:

$$\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

69. Теңдеменин тамырынын жарымын тапкыла:

$$\sqrt{x-3}=6+\sqrt[4]{x-3}.$$

а) 42; *б*) 43; *в*) 44; *г*) 45; *д*) 46.

70. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$3\cdot\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4.$$

а) – 3; *б*) – 2; *в*) – 1; *г*) 0; *д*) 1.

71. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла: $\sqrt{x}\,\sqrt{2-x}=2x$.

а) 0; *б*) 0,2; *в*) 0,4; *г*) 0,5; *д*) 0,9.

72. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2.$$

а) – 3; *б*) – 2; *в*) 0; *г*) 2; *д*) 3.

§ 3. Иррационалдык барабарсыздыктар жана чыгаруу методдору

1-а н ы к т а м а. Белгисизди радикалдын астына камтыган алгебралык барабарсыздыкты иррационалдык барабарсыздык дейбиз.

Мисалы, $x<\sqrt{x}+\dfrac{1}{x+1}$, $\sqrt[3]{x-2}\geq x^2+5$, $\dfrac{x+\sqrt[4]{x}}{x-3}<1-$ иррационалдык барабарсыздыктар. Ал эми $x^3+\sqrt{5}>0$ иррационалдык барабарсыздык эмес, анткени радикалдын астында белгисиз чоңдук жок.

2-а н ы к т а м а. Барабарсыздыктын чыгарылышы деп аны туура сан барабарсыздыгына же теңдештикке айландырган белгисиз чоңдуктун маанилерин айтабыз.

Барабарсыздыкты чыгаруу – бул же аны канааттандырган чыныгы сандардын (R) көптүгүн табууну же анын чыгарылышы жок (аны канааттандырган бир да чыныгы сан жок) экенин далилдөөнү билдирери белгилүү.

Иррационалдык барабарсыздыктын аныкталуу облусу – бул анын эки жагы тең аныкталган белгисиздин маанилеринин көптүгү.

Мисалы, $x^4+\sqrt{3-x}<\dfrac{x}{x-2}$ иррационалдык барабарсыздыгынын АО : $3-x\geq 0$ (сол жагыныкы), $x\neq 2$ (оң жагыныкы) $\Rightarrow(-\infty;\ 2)\cup\cup(2;\ 3]$.

Мындан ары колдонуш үчүн төмөнкү кыскартууларды кийирели:

БАО – барабарсыздыктын аныкталуу облусу деп келишип алалы, БСЖ – барабарсыздыктын сол жагы, БОЖ – барабарсыздыктын оң жагы, СЖ – сол жагы, ОЖ – оң жагы.

Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда, иррационалдык теңдемелерди чыгаруудагыдай эле, жуп даражалуу тамырлар (радикалдар) арифметикалык (тамыр астындагы туюнтма терс эмес) гана болуп каралат, ал эми так даражалуу радикалдар тамыр астындагы туюнтманын бардык чыныгы маанилеринде каралат.

Эскертүү! Иррационалдык барабарсыздыктардын чыгарылыштары, негизинен, сандар көптүгү болот. Ошондуктан табылган чыгарылыштын тууралыгын текшерүү кыйынга турат (көбүнчө мүмкүн эмес). Демек, иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда жүргүзүлгөн бардык өзгөртүүлөр тең күчтүү (эквиваленттүү) болушуна өзгөчө көңүл буруу керек.

Бул параграфтын материалдарын жакшы өздөштүрүү үчүн:

– рационалдык барабарсыздыктарды чыгаруу методдорун;

– кыскача көбөйтүүнүн формулаларын;

– рационалдык бөлчөктөр менен жүргүзүлүүчү амалдарды;

– көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратууну;

– рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин;

– интервалдар методун;

– барабарсыздыктардын касиеттерин;

– арифметикалык тамыр жана анын касиеттерин;

– иррационалдык теңдемелердин түрлөрүн жана аларды чыгаруу методдорун;

– функциялардын аныкталуу облустарын табууну;

– сан огундагы көптүктөр (интервалдар, сегменттер) менен жүргүзүлүүчү амалдарды (кошуу же биригүү; көбөйтүндү же жалпы бөлүк; кемитүү);

– барабарсыздыктарды теңдеш өзгөртүп түзүүнү билүү керек болот.

Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда колдонулуучу негизги методдорго: 1) аныкталуу облустун табуу, 2) арифметикалык тамырдын касиеттерин колдонуу, 3) даражага көтөрүү, 4) жаңы белгисизди киййрүү, 5) толук квадратты бөлүп алуу, 6) график методу кирет. Көбүнчө бул методдор айкалышта колдонулат.

Ошондой эле иррационалдык барабарсыздыктарды чыгаруунун негизги методу болуп берилген барабарсыздыкты тең күчтүү рационалдык барабарсыздыктардын системасына же системаларынын жыйындысына келтирүү саналат.

Аныкталуу облустун табуу методу менен арифметикалык тамырдын касиеттерин колдонуу методун, б.а. 1), 2) методдорун бирге пайдаланууга мисал келтирели.

1-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x} > -1$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x \geq 0$ жана анын СЖ $\sqrt{x} \geq 0$ (арифметикалык тамыр), ал эми ОЖ терс. Демек, БСЖ > БОЖ, эгерде $x \geq 0$ болсо. Мындан $x \geq 0$ чыгарылыш экенин алабыз.

Жообу: $x \geq 0$.

2-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}>\sqrt[6]{5-x}$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x+2 \geq 0$, $x-5 \geq 0$, $5-x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, $x \geq 5$, $x \leq 5 \Rightarrow x=5$. Берилген барабарсыздыкты $x=5$ те текшерип: $\sqrt{5+2}+\sqrt{0}>\sqrt{0} \Rightarrow \sqrt{7}>0$ туура сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $x=5$ чыгарылыш болот.

Жообу: $x = 5$.

3-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}<-x^2-3$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. БАОдо анын СЖ $\geq 1>0$, ал эми ОЖ<1. Демек, $x \geq 1$ болгондо берилген барабарсыздык аткарылбайт.

Жообу: $x \in \varnothing$ (чыгарылышы жок).

Эми 1), 2), 3) методдорунун биргеликте колдонулушуна токтололу.

Жуп даражалуу радикалдары бар иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууга кайрылалы. Мындай барабарсыздыктар негизинен төмөнкүдөй төрт түрдө кездешет:

А) БАО до барабарсыздыктын эки жагы тең терс эмес. Мисалы, $\sqrt[4]{5+2x} \geq \sqrt{x-9}$.

Б) БАОдо барабарсыздыктын эки жагы тең терс. Мисалы, $-\sqrt{x} \geq -\sqrt[6]{x+3}-\sqrt[8]{x-4}$.

В) БАОдо барабарсыздыктын СЖнын белгиси аныкталбаган, ал эми ОЖ ≥ 0. Мисалы, $x-3 \geq \sqrt{x^2-x-1}$.

Г) БАОдо барабарсыздыктын СЖ ≥ 0, ал эми ОЖнын белгиси аныкталбаган. Мисалы, $\sqrt{x+2}>x$.

Бул учурларга токтололу. А) түрүндөгү барабарсыздыктарды чыгаруу төмөнкү теоремага негизделген.

1-т е о р е м а. БАОдо

$$f_1(x) \geq f_2(x), \qquad (1)$$

мында $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$, барабарсыздыгы

$$(f_1(x))^{2k} \geq (f_2(x))^{2k}, \quad k \in N \qquad (2)$$

барабарсыздыгына тең күчтүү.

Барабарсыздыктын Б) түрү эки жагын тең (-1) ге көбөйтүүнүн натыйжасында А) түрүнө келтирилет.

Маселен $-\sqrt{x-2} \geq -\sqrt{x+3} - 2$ барабарсыздыгы $\sqrt{x-2} \leq \sqrt{x+3} +$ $+2$ барабарсыздыгына, б. а. барабарсыздыктын А) түрүнө келет.

А) учуруна мисалдар чыгаралы.

4-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$.

Ч ы г а р у у. Арифметикалык тамырдын касиети боюнча барабарсыздыктын эки жагы тең БАОдо терс эмес. Демек, 1-теореманы колдонууга болот: $x + 1 \geq 0$ (СЖнын АО), $x - 1 \geq 0$ (ОЖнын АО), $x+1>x-1$ (берилген барабарсыздыктын эки жагын квадратка көтөрдүк). Мындан $\begin{cases} x \geq 1 \text{ (БАО)}, \\ 1 > -1 \end{cases}$ (даражалоонун натыйжасы, б. а. даражага көтөрүүнүн натыйжасы – БАОдо аткарылат) келип чыгат. Демек, *жообу*: $x \geq 1$.

5-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} < 3$.

Ч ы г а р у у. 1-теореманын негизинде: $\dfrac{x-1}{x} \geq 0$ (БАО), $\dfrac{x-1}{x} < 9$ (квадратка көтөрүүнүн натыйжасы). Интервалдар методун колдонсок, анда БАО: $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ \infty)$ жана $\dfrac{x-1}{x} < 9$ рационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы $(-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup (0;\ \infty)$ экенин алабыз. (Текшерип көргүлө!). Бул табылган көптүктөрдүн жалпы бөлүгү $(-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup [1;\ \infty)$ берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $x \in (-\infty;\ -\dfrac{1}{8}) \cup [1;\ \infty)$.

В) түрүндөгү иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруу үчүн төмөнкү теореманы колдонуу керек.

2-т е о р е м а. Берилген

$$f_1(x) \geq \sqrt[2k]{f_2(x)}, \quad k \in N \tag{3}$$

барабарсыздыгы рационалдык барабарсыздыктардын төмөнкү системасына тең күчтүү: $\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ (f_1(x))^{2k} \geq f_2(x). \end{cases}$

Э с к е р т үү. Эгерде (3) барабарсыздыгында $f_1(x) < 0$ болсо, анда $\sqrt[2k]{f_2(x)} < f_1(x)$, $k \in N$ иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы жок, анткени анын СЖ ≥ 0, ал эми ОЖ < 0. Мисален, $\sqrt{x-9} < -3$ иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы жок.

Эми 2-теореманы колдонууга мисалдар келтирели.

6-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $x \geq \sqrt{2x+35}$.

Ч ы г а р у у. 2-теореманын негизинде: $\begin{cases} x \geq 0 \ \text{(БАО)}, \\ 2x+35 \geq 0 \\ x^2 \geq 2x+35. \end{cases}$ (барабарсыздыкты квадратка көтөрүүгө керектүү шарт). Мындагы үчүнчү барабарсыздык: даражалоонун натыйжасы, б. а. берилген барабарсыздыкты квадратка көтөрдүк, 1-теореманы колдондук.

Мындан $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -17{,}5; \\ x \in (-\infty; -5] \cup [7; \infty) \end{cases}$ (интервалдар методун колдондук).

Жообу: $x \geq 7$.

Демек, 2-теореманы колдонууда 1-теореманы пайдаландык.

7-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $1 - x > \sqrt{x+5}$.

Ч ы г а р у у. 2-теореманы колдонобуз:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ x+5 \geq 0, \\ (1-x)^2 > x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 1, & (*) \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty) & (**) \end{cases}$$

Мындагы (*) – биринчи эки барабарсыздыктын чыгарылышы, (**) – системанын үчүнчү квадраттык барабарсыздыгын чыгарууда интервалдар методун колдонуунун натыйжасы. Табылган эки көптүктүн жалпы бөлүгү $x \in [-5; -1)$.

Жообу: $-5 \leq x < -1$.

Г) түрүндөгү иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруу төмөнкү теоремага негизделген.

3-т е о р е м а. Берилген

$$\sqrt[2k]{f_1(x)} \geq f_2(x) \qquad (4)$$

барабарсыздыгы рационалдык барабарсыздыктардын системаларынын төмөнкү жыйындысына тең күчтүү:

а) $\begin{cases} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) \ge 0, \\ f_1(x) \ge (f_2(x))^2 \end{cases}$ жана б) $\begin{cases} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases}$

Мисалдарга кайрылалы.

8-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x+2} > x$.

Ч ы г а р у у. 3-теореманы колдонуп, $\begin{cases} x+2 \ge 0 \text{ (БАО)}, \\ x \ge 0 \\ x+2 > x^2. \end{cases}$ (квадратка көтөрүү үчүн керектүү шарт). Мындагы үчүнчү барабарсыздык – квадратка көтөрүүнүн натыйжасы,

1-теореманы колдондук. Демек, жогорку жана бул: $\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x < 0 \end{cases}$ рационалдык барабарсыздыктар системаларынын жыйындысын алабыз. Биринчи системадан $x \ge -2$, $x \ge 0$, $-1<x<2$ (интервалдар методун колдондук) $\Rightarrow$ $0 \le x< 2$, ал эми экинчи системадан $-2 \le x <0$ гө келебиз. Демек, $-2 \le x \le 2$.

Жообу: $|x| \le 2$.

9-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.

Ч ы г а р у у. 3-теореманы колдонобуз. Анда *а)* $x^2-4x \ge 0$, $x-3 \ge 0$, $x^2-4x> (x-3)^2 \Rightarrow x\in (-\infty; 0]\cup [4; \infty)$, $x\in [3; \infty)$, $x\in [\frac{9}{2}; \infty)$ (биринчи квадраттык барабарсыздыгына интервалдар методун колдондук, үчүнчү барабарсыздык $2x > 9$га келет). Демек, *а)* учурунда $x\in (\frac{9}{2}; \infty)$. Эми *б)* учурун карайлы: $x^2-4x \ge 0$, $x-3<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$, $x\in (-\infty; 3) \Rightarrow x\in (-\infty; 0]$. Эми *а)*, *б)* учурларында табылган чыгарылыштардын биригүүсүн табабыз: $x\in(-\infty; 0] \cup (\frac{9}{2}; \infty)$.

Жообу: $x\in (-\infty; 0] \cup (\frac{9}{2}; \infty)$.

Эми иррационалдык барабарсыздыктардын дагы бир түрүнө кайрылалы.

Д) Так даражалуу радикалдарды камтыган иррационалдык барабарсыздыктар. Маселен, $\sqrt[3]{x+3} > x$.

Бул учурда төмөнкү эрежени эстеп коёлу: Эгерде берилген барабарсыздыкты так натуралдык даражага көтөрсөк, анда тең күчтүү барабарсыздыкка келебиз. Б. а., төмөнкү теорема орун алат.

4-т е о р е м а. Берилген

$$f_1(x) > f_2(x) \qquad (5)$$

барабарсыздыгы

$$\sqrt[2k+1]{f_1(x)} > \sqrt[2k+1]{f_2(x)} \qquad (6)$$

барабарсыздыгына тең күчтүү. Ошондой эле тескерисинче, (6) барабарсыздыгы (5) барабарсыздыгына тең күчтүү.

Демек, (5) $\Leftrightarrow$ (6).

10-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt[3]{x^3+3x^2} < x+1$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x \in R$. Эми 4-теореманын негизинде берилген барабарсыздыктын эки жагын кубка көтөрсөк: $x^3+3x^2<x^3+$ $+3x^2+3x+1 \Rightarrow 3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$ чыгарылышына келебиз.

Жообу: $x \in \left(-\frac{1}{3};\ \infty\right)$.

Биз төмөндө иррационалдык барабарсыздыктарды жаңы белгисизди кийирүү методун колдонуп чыгарууга мисалдар келтирели.

11-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Ч ы г а р у у. Жаңы t белгисизин кийирели: $\sqrt{15-x} = t > 0$ (БАО). Анда $x = 15 - t^2$ жана берилген иррационалдык барабарсыздык

$$\begin{cases} \dfrac{3-(15-t^2)}{t} < 1, \\ t > 0 \end{cases}$$

рационалдык барабарсыздыктар системасына келет. Мындан

$$\begin{cases} \dfrac{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)(t-4)}{t} < 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Интервалдар методун колдонуп, $t \in (0;\ 4)$ экенин алабыз, б. а. $t^2 \in (0;\ 16)$. Эми $t=\sqrt{15-x}$, $x=15-t^2$ экенин эске алсак, анда $x \in (-1;\ 15)$ (текшерип көргүлө!) берилген иррационалдык барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $x \in (-1;\ 15)$.

Бул мисалда $0 < t < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{15-x} < 4$. Мындан $0 < 15 - x < 16$ (барабарсыздыктын үч жагын тең квадратка көтөрдүк. Эми

$0<15-x,\ 15-x<16$ дан $x<15,\ x>-1$ же $-1<x<15 \Rightarrow x \in (-1;\ 15)$ жообуна келебиз.

12-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $x-3\sqrt{x}+2<0$.

Чыгаруу. БАО: $x \geq 0$. Жаңы t белгисизин $\sqrt{x}=t$ деп кийирели. Демек, $t \geq 0$. Анда биз берилген иррационалдык барабарсыздыкты төмөнкү рационалдык барабарсыздыктар системасына келтиребиз: $\begin{cases} t^2-3t+2<0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-1)(t-2)<0, \\ t \geq 0. \end{cases}$ Интервалдар методун колдонуп, $t \in (1;\ 2)$ же $1<t<2$ экенин алабыз. Эми $t=\sqrt{x}$ экенин эске алсак, анда $1<\sqrt{x}<2$ же бул барабарсыздыктын үч жагын тең квадратка көтөрүп, $1<x<4$ чыгарылышына келебиз.

Жообу: $1<x<4$.

Эскертүү. Эгерде 12-мисалда барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла деп шарт койсок, анда мындай маселенин жообу: $x=2$ болмок. Муну биз $1<x<4$ төн алабыз. Ал эми эң чоң бүтүн чыгарылыш $x=3$.

Эми толук квадратты бөлүп алуу методун колдонууга мисалдар келтирели.

13-мисал. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $x^4+x-2\sqrt{x}+3<0$; *б)* $x^4+x-2\sqrt{x}+3<0$.

Чыгаруу. а) БАО: $x \geq 0$. Толук квадратты бөлүп алабыз: $x^4+(\sqrt{x}-1)^2+2<0$. Биз БСЖ (оң) < БОЖ (терс) БАОдо аткарылбаган барабарсыздыкка келдик.

Жообу: $x \in \varnothing$.

б) Бул учурда да БАО: $x \geq 0$ жана $x^4+(\sqrt{x}-1)^2+2>0$. Бул барабарсыздык БАОдо аткарылат. Демек, БАО – чыгарылыш.

Жообу: $x \geq 0$.

14-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+4x+4}<1.$$

Чыгаруу. Толук квадратты бөлүп алуу методдун колдонсок, $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+2)^2}<1 \Rightarrow |x-1|-|x+2|<1$ (*)

барабарсыздыгына келебиз. Демек, берилген барабарсыздыктын АО: $x\in R$. Эми абсолюттук чондуктун (модулдун) касиетин колдонуп, (*) барабарсыздыгын чыгаралы. Мында $x=-2$, $x=1$ сандары бүткүл сан огун $(-\infty;\ -2),[-2;\ 1)$, $[1;\ \infty)$ интервалдарына бөлүшөт жана бул интервалдарда $|x-1|$ жана $|x+2|$ туюнтмаларынын белгилери турактуу. Б. а., интервалдар методун колдонобуз. Анда 1) $x\in(-\infty;\ -2)$ десек, (*) дан $-(x\ -1)+(x+2)<1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3<1$ деген аткарылбаган сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $(-\infty;\ -2)$ де (*) нын чыгарылышы жок. *2)* $x\in[-2;\ 1)$ десек, (*) дан $-(x-1)-(x+2)<1 \Rightarrow -2x-1<1 \Rightarrow x>-1$ ди алабыз. Демек, $[-2;\ 1)$ де (*) нын чыгарылышы $x\in(-1;\ 1)$. *3)* $x\in[1;\ \infty)$ десек, (*) дан $x\ -1-(x+2)\ <1 \Rightarrow -3<1$ туура сан барабарсыздыгын алабыз. Демек, $x\in[1;\ \infty)$ – чыгарылыш.

Жообу: $x\in(-1;\ \infty)$.

Иррационалдык барабарсыздыктын дагы бир түрүн чыгарууга мисал келтирели.

15-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\le 0$.

Ч ы г а р у у. БАО: $x^2\ -\ x\ -2\ge 0 \Rightarrow (x+1)(x\ -2)\ge 0$. Интервалдар методун колдонсок, БАО: $x\in(-\ \infty;\ -1]\cup[2;\ \infty)$ экенин алабыз.

Берилген барабарсыздыктын чыгарылышы

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-\ 2}<0 \qquad (**)$$

иррационалдык барабарсыздыгынын жана

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0 \qquad (***)$$

иррационалдык теңдемесинин чыгарылыштарынын көптүктөрүнүн биригүүсүнөн турары айдан ачык (шексиз).

(***) теңдемесин көбөйтүүчүлөргө ажыратуу методун колдонуп чыгаралы, анда анын тамырлары $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=2$ болорун алабыз.

Эми (**) барабарсыздыгын чыгаралы. Бул учурда $\sqrt{x^2-x-2}>0$, себеби $x^2-x-2=0$ дүн тамырлары $x_2=-1$, $x_3=2$ (**) барабарсыздыгын канааттандырбайт. Ошондуктан эки жагын $\sqrt{x^2-x-2}>0$ гө бөлүп, (**) дан $x\ -1<0$ сызыктуу барабарсыздыгына келебиз. Мындан $x<1$ же $x\in(-\infty;\ 1)$. Демек, берилген иррационалдык барабарсыздыктын чыгарылышы $x\in(-\ \infty;\ -1)\cup[2;\ \infty)\cap(-\ \infty;$ $-1]\cup\{2\} \Rightarrow x\in(-\infty;\ -1)\cup\{2\}$.

Жообу: $-\infty<x<-1$, $x=2$.

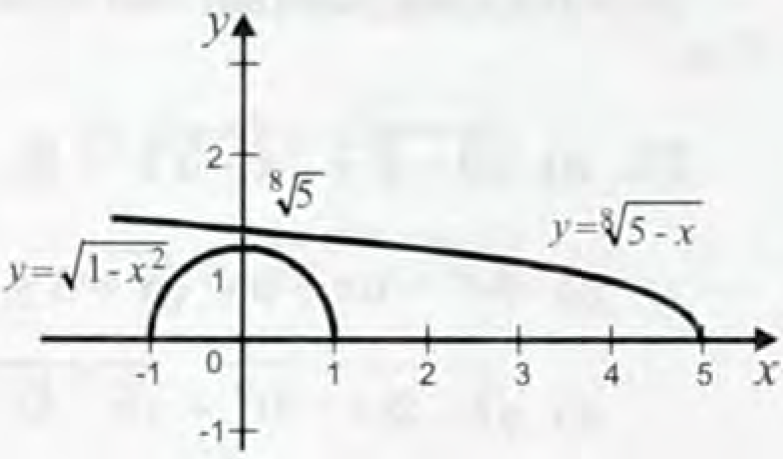
Иррационалдык барабарсыздыкты график методу менен чыгарууга мисал келтирели.

16-м и с а л. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{1-x^2}<\sqrt[8]{5-x}$.

Ч ы г а р у у. БАО: $1-x^2\geq 0,\ 5-x\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1,\ x\leq 5 \ \Rightarrow\ |x|\leq 1$. Бул барабарсыздыкты чыгарууга график методун колдонолу, $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt[8]{5-x}$ деп, бул функциялардын графиктерин чиели: $f_1(x)<f_2(x)$.

Бул чиймеден $x\in[-1;\ 1]$, б. а. $|x|\leq 1$ (БАО) болгондо, берилген иррационалдык барабарсыздыктын аткарылаары келип чыгат. Муну далилдейли. Ар бир $x\in[-1;\ 1]$ үчүн $0\leq f_1(x)\leq 1$ жана $f_2(x)=\sqrt[8]{5-x}\geq\sqrt[8]{4}>1$.

Демек, ар кандай $x\in[-1;\ 1]$ үчүн $f_1(x)\leq 1<f_2(x)$. Мындан, $x\in[-1;\ 1]$ берилген барабарсыздыктын чыгарылышы экенин алабыз.



5-чийме

Жообу: $-1\leq x\leq 1$.

Эми иррационалдык барабарсыздыкты чыгарууга байланышкан бир маселеге токтололу жана аны чыгарууга туундуну колдонуу методун пайдаланалы.

17-м и с а л.

$$\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2} \qquad (a)$$

барабарсыздыгы $x\geq 0$ болгондо орун аларын далилдегиле.

Ч ы г а р у у. Берилген $x\geq 0$ үчүн $\sqrt{1+x}>0$. Белгилөө кийирели: $f(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$. Бул функция $x\in[0;\ \infty)$ болгондо үзгүлтүксүз жана анын туундусу $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ да үзгүлтүксүз. Мындан $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}\right)=\frac{x}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}\geq 0$ экенин алабыз. (Бул учурда бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{1+x}+1$ ге же $\sqrt{1+x}-1$ дин түйүндөшүнө көбөйттүк). Мындан $f(x)\geq f(0)$ келип чыгат ($f'(x)\geq 0$ дү $[0;\ x]$ те интегралдайбыз). Ал эми $f(0)=0$. Демек, $f(x)\geq 0$, б. а. *(a)* барабарсыздыгы туура.

Биз бул 17-мисалдын маанисин башкача түшүнсөк да болот: *(a)* иррационалдык барабарсыздыгынын чыгарылышы $x\geq 0$.

Суроолор

1) Кандай барабарсыздыкты иррационалдык дейбиз?

2) Иррационалдык барабарсыздыктардын кандай негизги түрлөрүн билесиңер?

3) Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгаруунун негизги методдорун атагыла.

4) Теңдеме менен барабарсыздыктын чыгарылыштарынын негизги айырмачылыгы эмнеде?

Көнүгүүлөр

Барабарсыздыктын чыгарылышы жок экенин далилдегиле (73 – 74).

73. *а)* $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}\geq-9$;

б) $\sqrt[4]{x^2+5x+6}+\sqrt{x+8}\leq-3$;

в) $\sqrt{1+2(x-3)^2}+\sqrt{5-4x+x^2}<\frac{3}{2}$;

г) $\sqrt{x^2-x+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+4}}<2$.

Көрсөтмө: в) БСЖнын ылдый жагынан чамалагыла;

г) $\sqrt{x^2-x+4}>0$ экенин эске алып, БСЖ ≥ 2 экенин көрсөткүлө.

74. *а)* $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-7}<5$;

б) $\sqrt{x-5}-\sqrt[3]{4-x}<-1$;

в) $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$;

г) $\sqrt{1+x^4}+\sqrt[4]{16+x^2}<2$.

Көрсөтмө: а) БАО ны тапкыла; б) БСЖ ны БАОдо карагыла; в) $x-2<0$ жана $x-2\geq 0$ учурларын өзүнчө карагыла; г) БСЖнын ылдый жагынан чамалагыла.

75. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{x-5}>-2$;

б) $\sqrt{x+2}>1$;

в) $\sqrt[3]{x-4}<3$;

г) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5}\geq\sqrt{5-2x}$;

д) $\sqrt[6]{3-x}+\sqrt[4]{x-3}<\sqrt[3]{x}$;

е) $\sqrt[3]{x^3+x-1}<x$.

76. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$;

б) $\sqrt{4+3x-x^2}<2$;

в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}$;

г) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}>\sqrt{2x+7}$;

д) $\sqrt{2x-3}<1$;

е) $\sqrt{8x-9}>2$.

77. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-7}<\sqrt{2}-1$;

г) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-5}}>7$;

б) $\sqrt{\frac{10-x}{x-20}} > -1$; д) $\sqrt[3]{3x-7} > \sqrt[3]{7x+2}$;

в) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-50} \geq \sqrt{50-2x}$; е) $\sqrt[3]{x^2-4} < 5$.

78. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $6x-1 > \sqrt{5-2x}$; г) $x+1 > \sqrt{x+2}$;

б) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}$; д) $2x-1 > \sqrt{2x+5}$;

в) $x > \sqrt{2x+24}$; е) $x > \sqrt{x^2-x-12}$.

Көрсөтмө: 2-теореманы пайдалангыла.

79. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-4x+3} \geq 2-x$; г) $\sqrt{x+3} > x+1$;

б) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; д) $\sqrt{x^2-5x-24} > x-2$;

в) $\sqrt{1-x} > x$; е) $3\sqrt{6+x-x^2}+2 > 4x$.

Көрсөтмө: 3-теореманы колдонгула.

80. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-1} > x-2$; г) $\sqrt{(x-6)(1-x)} < 3+2x$;

б) $\sqrt{x+18} < 2-x$; д) $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$;

в) $\sqrt{5-2x} < 6x-1$; е) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6$.

81. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} - \sqrt{2x+4} > 0$; г) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$;

б) $3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} > 1$; д) $\sqrt[4]{15+x} - \sqrt[4]{2-x} > 1$;

в) $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}$; е) $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} < 2$.

82. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$; г) $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$;

б) $\frac{\sqrt{x^2-81}+2}{x-1} < 1$; д) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$;

в) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3$; *е)* $\sqrt{x+44-14\sqrt{x-5}} - \sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}} > 2$.

83. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $2x+5\sqrt{x}-7 \geq 0$; *г)* $x-12\sqrt{x}+11 \leq 0$;

б) $x-9\sqrt{x}+8 < 0$; *д)* $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20 > 0$;

в) $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$; *е)* $7x-19\sqrt{x}+12 < 0$.

Көрсөтмө: Жаңы белгисизди кийирүү методун колдонгула. *в)* $\sqrt{2-x}=t$ деп, $t>0$ экенин эске алгыла; *д)* $\sqrt{2x}=t$ деп, алынган төртүнчү даражадагы алгебралык теңдеменин эки тамыры $t_{1,2}=2$ экенин эске алып (бул Виеттин теоремасынан келип чыгат), төртүнчү даражадагы көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

84. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{5-x} + 2x^2 - 24x + 75 > 0$; *в)* $x-14\sqrt{x}+49 \leq 0$;

б) $x-4\sqrt{x}+5 < 0$; *г)* $|x| - \sqrt{x^2-12x+36} < 3$.

Көрсөтмө: Толук квадратты бөлүп алуу методун пайдалангыла.

85. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$; *г)* $x\sqrt{\dfrac{x+5}{x+6}} < 0$;

б) $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$; *д)* $(2+x)\sqrt{4-x}\,\sqrt{5-x} \geq 0$;

в) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \geq 0$; *е)* $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

86. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x-1} \leq 1$; *б)* $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} > 3$.

Көрсөтмө: График методун пайдалангыла (компьютерди колдонгула).

Тест

87. Барабарсыздыктын чыгарылыштарынын суммасын тапкыла: $(x-1)\sqrt{-x^2+x+2} \geq 0$.

а) -2; *б)* 0; *в)* 1; *г)* 2; *д)* 3.

88. Барабарсыздыкты канааттандырган эң чоң бүтүн x ти тапкыла: $\sqrt{14-x}>2-x$.

а) 7; *б*) 8; *в*) 10; *г*) 12; *д*) 14.

89. Барабарсыздыкты канааттандырган x тин эң кичине бүтүн эң маанисин тапкыла: $\sqrt{x+12}<x$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

90. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын суммасын тапкыла: $\dfrac{2x^2-5x-12}{\sqrt{4x+5}}\le 0$.

а) 3; *б*) 5; *в*) 7; *г*) 9; *д*) 11.

91. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[5]{5-x}\,\sqrt{x-2}>0$.

а) 4; *б*) 5; *в*) 6; *г*) 8; *д*) 10.

92. Барабарсыздык аткарыла турган интервалдын узундугун тапкыла: $x-4\sqrt{x}-5\le 0$.

а) 15; *б*) 20; *в*) 25; *г*) 30; *д*) 35.

93. Барабарсыздык аткарыла турган интервалдын ортосун тапкыла: $\sqrt{2x-7}<3$.

а) 4,5; *б*) 5,2; *в*) 5,5; *г*) 5,75; *д*) 6.

94. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын арифметикалык орто санын тапкыла: $\sqrt{x^2-16}\le x-2$.

а) 2,5; *б*) 3,7; *в*) 4; *г*) 4,2; *д*) 4,5.

Көрсөтмө: № 87–94 көнүгүүлөрдө адегенде бардык чыгарылыштарын таап, анан алардан көнүгүүлөрдүн шарттарын канаатандыра тургандарын бөлүп алгыла. Текстеги 12-мисалдан кийинки эскертүүнү карагыла.

§ 4. Модулду камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгаруу

Биз жогоруда иррационалдык теңдемелерди жана иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда модулду камтыган теңдемеге (2 параграфынын 61-мисалы) жана барабарсыздыкка (3 параграфынын 14-мисалы) кездештик жана аларды чыгардык. Мындай теңдемелер жана барабарсыздыктар илим менен техниканын көптөгөн тармактарында өзгөчө роль ойнойт. Ошондуктан ушул параграфты жазууну туура таптык.

Модулду камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда модулдун аныктамасы жана интервалдар методу колдонулат.

Модулдун аныктамасын эске түшүрөлү.

1-а н ы к т а м а. Ар кандай чыныгы x саны үчүн, б.а. $x\in R$ үчүн анын $|x|$ төмөнкүчө табылат: $|x|=\begin{cases}-x, & \text{эгерде } x<0,\\ x, & \text{эгерде } x\geq 0 \text{ болсо.}\end{cases}$

Мындан $|x|=0$ болсо, $x=0$ экенин алабыз.

Эми бул аныктаманын кеңейтилгенин келтирели.

2-а н ы к т а м а. Ар кандай чыныгы x, x_0 сандары үчүн, б. а. $x, x_0\in R$ үчүн $x-x_0$ дун модулу төмөнкүчө табылат:

$$|x-x_0|=\begin{cases}-(x-x_0), & \text{эгерде } x<x_0,\\ x-x_0, & \text{эгерде } x\geq x_0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

2-аныктамадан эгерде $|x-x_0|=0$ болсо, анда $x-x_0=0$, $x=x_0$ келип чыгат.

Төмөндө 1- жана 2- аныктамалардын кеңейтилген вариантын, б.а. $y=f(x)$ функциясынын модулу кантип табыларын келтирели.

3-а н ы к т а м а. Бизге $y=f(x)$ чыныгы функциясы берилсин, б. а. $x\in R$, $y\in R$ болсун дейли. Анда анын модулу $|f(x)|$ төмөнкүчө табылат: $|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & \text{эгерде } f(x)<0,\\ f(x), & \text{эгерде } f(x)\geq 0 \text{ болсо.}\end{cases}$

3-аныктамадан $|f(x)|=0$ болсо, анда $f(x)=0$ келип чыгат.

Сандын же функциянын модулун анын абсолюттук чоңдугу деп да аташарын эскерте кетели.

Эми мисалдарды чыгарууда колдонула турган дагы бир түшүнүккө токтололу.

4-а н ы к т а м а. Модулдун ичиндеги туюнтманын нөлүн критикалык (сыналуучу) чекит деп айтабыз.

Критикалык чекит жалгыз (бирөө эле) же андан да көп болушу мүмкүн.

Биз жогоруда көрдүк: $|x|$ тин критикалык чекити $x=0$ (бирөө), $|x-x_0|$ дүн критикалык чекити $x=x_0$ (бирөө), ал эми $|f(x)|$ тин критикалык чекиттери $f(x)=0$ теңдемесинин тамырлары болот.

Демек, туюнтманын нөлү деп, бул туюнтманы нөлгө барабарлагандан келип чыккан теңдеменин тамырын айтабыз.

4-аныктаманын мазмунун ачууга, б.а. критикалык чекиттерди табууга мисалдар келтирели.

Э с к е р т ү ү! 1) Модулдары бар функциянын критикалык чекиттери деп функциядагы модулдардын ичиндеги туюнтмалардын нөлдөрүн айтабыз. 2) Теңдеменин же барабарсыздыктын критикалык чекиттери деп теңдемедеги же барабарсыздыктагы модулдардын ичиндеги туюнтмалардын нөлдөрү айтылат.

1-м и с а л. $y=|8x^2-9x+1|+|x-3|$ функциясынын критикалык чекиттерин тапкыла.

Ч ы г а р у у. Бул функцияда эки модул бар. Ар бирөөнүн ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап: $8x^2-9x+1=0$, $x-3=0$ теңдемелеринин жыйындысын алабыз. Биринчи теңдеменин (квадраттык) тамырлары $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=1$, ал эми экинчи (сызыктуу) теңдемеден $x_3=3$ тү алабыз. Демек, $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=1$, $x_3=3$ бул функциянын критикалык чекиттери.

2-м и с а л. Теңдеменин критикалык чекиттерин тапкыла: $2|x+5|-|4x-7|=6$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдемеде модулдар экөө: $|x+5|$, $|4x-7|$. Алардын ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап: $x+5=0$, $4x-7=0$ сызыктуу теңдемелеринин жыйындысын алабыз. Мындан $x=-5$, $4x=7 \Rightarrow x=-5$, $x=\frac{7}{4}$ келип чыгат. Демек, берилген теңдеменин критикалык чекиттери $x=-5$, $x=\frac{7}{4}$.

3-м и с а л. Барабарсыздыктын критикалык чекиттерин тапкыла: $|x^3+1|-8|x-6|+2|9x+11|>5x-91$.

Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыкта үч туюнтма модулдун ичинде. Аларды нөлгө барабарласак, анда $x^3+1=0$, $x-6=0$, $9x+11=0$ теңдемелеринин жыйындысына келебиз. Биринчи теңдемеден $(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^2-x+1\neq 0$, $x=-1$, ал эми экинчи жана үчүнчү сызыктуу теңдемелеринен $x=6$, $x=-\frac{11}{9}$ келип чыгат. Демек, $x=-\frac{11}{9}$, $x=-1$, $x=6$ берилген барабарсыздыктын критикалык чекиттери.

Эми критикалык чекиттер сан огун интервалдарга бөлөрүн жана ар бир интервалда модулдун ичиндеги туюнтмалардын белгилери турактуу болорун эске алып, б. а. интервалдар методун колдонуп мисалдар чыгаралы.

Мисалдар чыгарууда төмөнкү эреже колдонулат:

1) критикалык чекиттерди табышат;

2) сан огун ар биринде модулдун же модулдардын ичиндеги туюнтманын белгиси турактуу болгон интервалдарга бөлүшөт;

3) аныкталган ар бир интервалда модул белгиси жок теңде-

мелерди чыгарышат. Ар бир интервалда табылган чыгарылыштардын көптүктөрүнүн биригүүсү берилген теңдеменин чыгарылышы болот.

4-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x+3| = 2x - 1$.

Ч ы г а р у у. Жогорку эрежени колдонолу. 1) Бул теңдеменин критикалык чекити: $|x+3|=0 \Rightarrow x=-3$. 2) Демек, $x=-3$ критикалык чекит сан огун $(-\infty; -3)$ жана $[-3; \infty)$ интервалдарына бөлөт жана бул ар бир интервалда $|x+3|$ түн белгиси турактуу. 3) Эми модулдун 2-аныктамасын пайдаланабыз: *а)* $x\in(-\infty; -3)$ же $x<-3$ болсо, анда берилген теңдемеден $-(x+3)=2x-1$ теңдемесин алабыз. Мындан $3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$, келип чыгат. Бул табылган $x=-\frac{2}{3}$ каралган $(-\infty; -3)$ интервалына кирбейт. Демек, бул интервалда берилген теңдеменин тамыры жок. б) $x\in[-3; \infty)$ же $x \geq -3$ болсо, анда берилген теңдемеден $x+3=2x-1$ же $x=4$ тү алабыз. Бул табылган x тин мааниси $x \geq -3$ интервалында жатат. Демек, $x=4$ чыгарылыш.

Жообу: $x=4$.

5-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x+2|+|x+3|=x$.

Ч ы г а р у у. Жогоруда берилген эрежениң негизинде: 1) $x+2=0$, $x+3=0 \Rightarrow x=-2$, $x=-3$ же $x=-3$, $x=-2$ берилген теңдеменин критикалык чекиттери. 2) Сан огун критикалык чекиттер $(-\infty; -3)$, $[-3; -2)$, $[-2; \infty)$ интервалдарына бөлүшөт жана бул ар бир интервалда теңдеменин модулдарынын ичиндеги туюнтмалардын белгилери турактуу. 3) Аныкталган ар бир интервалда берилген теңдемени карайлы. Анда *а)* $x<-3$ болсо, анда $-(x+3)-(x+2)=x \Rightarrow -2x-5=x \Rightarrow -5=3x \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). *б)* $x\in[-3, -2)$ болсо, анда $x+3-(x+2)=x \Rightarrow x=1$ (каралган интервалга кирбейт). *в)* $x\geq -2$ болсо, анда $x+3+x+2=x \Rightarrow$ $\Rightarrow x=-5$ (каралган интервалга кирбейт). Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы жок.

Жообу: $\varnothing$.

Э с к е р т ү ү! 4-, 5-мисалдарда сол жагында терс эмес туюнтма (модуль), оң жагында белгиси аныкталбаган туюнтма турат. 4-мисалда оң жагы $2x-1\geq 0$, $x\geq\frac{1}{2}$ – бул берилген теңдеменин АО, ал эми 5-де АО: $x \geq 0$. 5-нин сол жагы ≥ 5, демек, $x\in\varnothing$ экенин алабыз.

6-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x|+|x-1|=1$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонобуз. *1)* $x=0$, $x-1=0 \Rightarrow x=0$, $x=1$ бул теңдеменин критикалык чекиттери. 2) Демек, критикалык чекиттер АОну $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$,

$[1; \infty)$ интервалдарына бөлөт, ошондой эле ар бир аныкталган интервалда x менен $x-1$ дин белгилери туруктуу. 3) *а*) $x<0$ болсо, анда $-x-(x-1)=1 \Rightarrow -2x=0,\ x=0$ (каралган $x<0$ интервалына кирбейт. *б*) $x\in[0; 1)$ болсо, анда $x-(x-1)=1 \Rightarrow 1=1$. Мындан $[0; 1)$ интервалындагы ар кандай x берилген теңдеменин тамыры деген жыйынтыкка келебиз. *в*) $x \geq 1$ болсо, анда $x+x-1=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ (каралган интервалга кирет). Демек, $x\in[0; 1)\cup$ $\{1\}=[0; 1]$. $x\in[0; 1]$, б. а. $0 \leq x \leq 1$.

Жообу: $x\in[0; 1]$, б. а. $0 \leq x \leq 1$.

7-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $x^2+|x|-2=0$.

Ч ы г а р у у. Теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонолу: 1) $x=0$ – критикалык чекит. 2) АОну $x=0$ эки интервалга бөлөт: $x<0$ жана $x>0$. 3) *а)* $x<0$ болсо, $x^2-x-2=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан: $x_1=-1$, $x_2=2$. *б*) $x \geq 0$ болсо, анда $x^2+x-2=0$. Мындан $x_3=-2$, $x_4=1$. Демек, берилген теңдеменин чыгарылыштарынын көптүгү $\{-1\}\cup\{1\}=\{-1; 1\}$.

Жообу: $x\in\{-1, 1\}$ (эки чыгарылыш).

Модулу бар теңдемени чыгаруунун дагы бир методуна мисал келтирели.

8-*м и с а л.* Теңдеменин тамырларын тапкыла: $|x^2-14|=|x^2-4|$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүп, төмөнкү тең күчтүү теңдемени алабыз: $(x^2-14)^2=(x^2-4)^2 \Rightarrow x^4-$ $-28x^2+196=x^4-8x^2+16 \Rightarrow -20x^2+180=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3$.

Жообу: $x\in\{-3; 3\}$.

Интервалдар методун колдонууга дагы бир мисал келтирели.

9-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Ч ы г а р у у. Бул теңдеменин АО: $x\in R$. Жогорку эрежени колдонолу: 1) $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0 \Rightarrow x=1$, $x=2$, $x=3$ берилген теңдеменин критикалык чекиттери. 2) АОнун табылган критикалык чекиттери $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3)$, $[3; \infty)$ төрт интервалына бөлүшөт жана бул ар бир интервалда модулдун ичиндеги туюнтмалардын белгилери туруктуу сакталат. 3) *а*) $x\in(-\infty; 1)$ болсо, анда берилген теңдемеден $-(x-1)-(x-2)-(x-3)=2 \Rightarrow -3x+6=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). *б*) $x\in[1; 2)$ болсо, анда $x-1-(x-2)-(x-3)=2 \Rightarrow x-1-2x+5=2 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=2$ (каралган интервалга кирбейт). *в*) $x\in[2; 3)$ болсо, анда $x-1+x-2-(x-3)=2 \Rightarrow x=2$ – чыгарылыш. *г*) $x\in[3; \infty)$ болсо, анда $x-1+x-2+x-3=2 \Rightarrow 3x-6=2 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$ (каралган интервалга кирбейт). Демек, берилген теңдеменин бир эле чыгарылышы бар: $x=2$.

Жообу: $x=2$.

Модулду камтыган барабарсыздыктарды чыгаруу модулду камтыган теңдемелерди чыгаруу сыяктуу эле жүргүзүлөт. Бир гана айырмасы бул учурда жогорку келтирилген эреженин 3) – пунктунда: ар бир аныкталган интервалда модулу жок барабарсыздыктар чыгарылат. Демек, интервалдар методун модулду камтыган барабарсыздыктарды чыгарууга колдонобуз. Мисалдарга кайрылалы.

10-*м и с а л.* Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x^2-2x|<x$.

Ч ы г а р у у. Жогорку эрежени, теңдеме менен барабарсыздыктын айырмасын эске алып, колдонолу.

1) Критикалык чекиттер: $x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$

2) Сан огун бул критикалык чекиттер $(-\infty;\ 0)$, $[0;\ 2)$, $[2;\ \infty)$ интервалдарына бөлөт. 3) берилген барабарсыздыкты $|x||x-2|<x$ түрүндө жазып алалы жана аныкталган ар бир интервалда бул барабарсыздыкты карайлы: *а*) $x\in[-\infty;\ 0)$ болсо, анда $-x(-x+2)<x \Rightarrow x^2-2x<x \Rightarrow x^2<3x$ (x – терс болсо, бул барабарсыздык аткарылбайт). Демек, $(-\infty;\ 0)$ дө чыгарылыш жок. *б*) $x\in[0;\ 2)$ болсо, анда $x(-x+2)<x \Rightarrow -x^2+2x<x \Rightarrow x^2>x$. Бул барабарсыздык $1<x<2$ болгондо аткарылат. Мындан $(1;\ 2)$ интервалы чыгарылыш деген тыянакка келебиз. Эми *в)* $x\in[2;\ \infty)$ десек, анда $x(x-2)<x \Rightarrow x^2<3x$ (бул барабарсыздык $x\in[2;\ 3)$ болгондо аткарылат). Демек, $[2;\ 3)$ – чыгарылыш. Жыйынтыгында $(1;\ 2)\cup$ $\cup[2;\ 3)=(1;\ 3)$ интервалы берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $1<x<3$.

11-*м и с а л.* Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x+1|+|x-4|<7$.

Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыктын АО: $x\in R$. Мурунку мисалдардай эле жогорку эрежени колдонолу. 1) Критикалык чекиттер: $x+1=0,\ x-4=0 \Rightarrow x=-1,\ x=4$. 2) АОнун бул чекиттер $(-\infty;\ -1)$, $[-1;\ 4)$, $[4;\ \infty)$ интервалдарына бөлүшөт. 3) Бул аныкталган ар бир интервалда берилген барабарсыздыкты карайлы: *а*) $x\in(-\infty;\ -1)$ болсо, анда $-(x+1)-(x-4)<7 \Rightarrow -2x+3<7 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x>-4 \Rightarrow x>-2$. Мындан $(-2;\ -1)$ интервалы каралган интервалдагы чыгарылыш болорун алабыз. *б*) $x\in[-1;\ 4)$ болсо, анда $x+1-(x-4)<7 \Rightarrow 5<7$ аткарылат $\Rightarrow [-1;\ 4)$ – чыгарылыш. *в*) $x\in[4;\ \infty)$ болсо, анда $x+1+x-4<7 \Rightarrow 2x<10 \Rightarrow x<5$. Демек, каралган интервалдан $[4;\ 5)$ интервалы чыгарылыш болот. *а*), *б*), *в*) дагы чыгарылыштардын биригүүсү: $(-2;\ -1)\cup[-1;\ 4)\cup[4;\ 5)=$ $=(-2;\ 5)$ интервалы берилген барабарсыздыктын чыгарылышы.

Жообу: $x\in(-2;\ 5)$.

12-*м и с а л.* Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|x-3|<1$.

Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыкты модулдун касиетин пайдаланып чыгарууга болот: $-1<x-3<1 \Rightarrow 3-1<x<1+3 \Rightarrow 2<x<4$ (*Жообу*).

Бул мисалга биз төмөнкү эрежени колдондук: Эгерде $b>0$ үчүн $|x - x_0|<b$ болсо, анда $-b < x - x_0 < b$. Эми барабарсыздыктын үч жагына тең x_0 ду кошсок, анда $x_0 - b<x< x_0 +b$ болот.

Суроолор

1) Модулдун аныктамасын айтып бергиле.
2) Критикалык чекит деген эмне?
3) Модулду камтыган теңдемелер менен барабарсыздыктарды чыгаруунун кандай методдорун билесиңер?

Көнүгүүлөр

95. Теңдеменин критикалык чекиттерин тапкыла:

а) $|x-7|+|5x-19|= 3$;
б) $|x^2-1|-|9 - x|= 1$;
в) $|x^3-1|+|x^2- 4|= 5$;
г) $|x^4-16|-|3x+17|= 4$;
д) $|2x^2-18x -1|=x^3 - 9$;
е) $|x+1|+|x+7|+|2x -3|= 13$.

96. Барабарсыздыктын критикалык чекиттерин тапкыла:

а) $| x^2- 9x|>x^3+x$;
б) $|3x+4|-|9x - 8|< 1$;
в) $|x|+|x^4- 9x|< 6$;
г) $|x^2- 4||x+5|>x^2 - 1$;

97. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x|+|x - 4|= -15$;
б) $|x-1|+|x^3-1|= 0$;
в) $|x+5|-|x -3|= 8$;
г) $|x|= 3$;
д) $|x+40|= 0$;
е) $|x+4|= 2x$.

98. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x+5|=-13$;
б) $|x+1|=-3x$;
в) $|x+5|=|10+x|$;
г) $|3x+1|+x= 9$;
д) $|x-3|+2|x+1|= 4$;
е) $| 5 - 2x|+|x+3|=2-3x$.

99. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x+3|+|2x-1|= 8$;
б) $|5 - x|+|x -1|= 10$;
в) $|4 - x|+|x -2|= 2$;
г) $| x^2+x|+3x -5= 0$;
д) $|1-2x|+|3x+2|+|x|= 5$;
е) $|x|-2|x+1|+3|x+2|= 4$.

100. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x-5|< 0$;
б) $|x-7| \le 0$;
в) $|x|+|x-2| <- 8$;
г) $|x+4| \ge 1$;
д) $|2x-1|-|x-2| \ge 4$;
е) $| 3- x| < 4$.

101. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|2x-7| \le 5$; *г*) $3|x-1| \le x+3$;

б) $|x-2| < 2x-10$; *д*) $|2x-1| \ge x-1$;

в) $|5-x| > \frac{1}{2}$; *е*) $2|x+1| > x+4$.

102. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x^2-5x| < 6$; *г*) $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \le 1$;

б) $|x-3|+|x+2|-x > 5$; *д*) $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \ge 1$;

в) $x^2-4x-2|x-2|+1 \le 0$; *е*) $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$.

Тест

103. Теңдеменин бүтүн тамырын тапкыла: $x^2+3x-|x+2|-6=0$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

104. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла: $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

а) 8; *б*) 9; *в*) 10; *г*) 12; *д*) 15.

105. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $|x-2|+|x+2| \le 4$.

а) -3; *б*) -2; *в*) 1; *г*) 2; *д*) 3.

106. Барабарсыздыктын бүтүн чыгарылыштарынын арифметикалык орто санын тапкыла: $\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$.

а) 5; *б*) 6; *в*) 8; *г*) 10; *д*) 13.

§ 5. Алгебралык теңдемелердин системаларын чыгаруу методдору

Эки же андан ашык теңдемелердин түрмөгүн *теңдемелер системасы* деп аталат. Теңдемелер системасынын чыгарылышы деп ар бир теңдемени теңдештикке айландыруучу белгисиз чондуктардын маанилерин айтабыз. Биз төмөндө алгебралык теңдемелер системаларын чыгаруунун негизги методдоруна токтолобуз.

1. Гаусстун методу.

Бул методдун идеясы: системанын бир теңдемесинен изделүүчү чоңдуктардын бирин калгандары аркылуу туюнтуп, системанын калган теңдемелериндеги анын ордуна коюуу болуп эсептелет жана бул процесс улам улантыла берет. Эгерде теңдемеде эки белгисиз жана эки теңдеме болсо, анда бул процессти бир эле жолу жасаганда берилген система үч бурчтук түрүнө келет, жана берилген системанын чыгарылышы бар же жок экендиги көрүнүп калат.

Гаусстун методун системаны үч бурчтук түрүнө келтирүү же белгисизди ордуна койуу же белгисизди азайтуу (четтетүү) методу деп да аташат. Ал эми методдун автору – Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – атактуу немис математиги ("Математиканын падышасы" наамы бар) экенин айта кетели.

Гаусстун методу сызыктуу теңдемелер системасы үчүн жана сызыктуу жана сызыктуу эмес теңдемелерден турган системалар үчүн жакшы натыйжаны берет.

1-м и с а л. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Бул системанын биринчи теңдемесинен x ти табалы: $3x=7-2y \Rightarrow x=\frac{7}{3}-\frac{2y}{3}$ жана анын экинчи теңдемесине койолу. Анда $4\left(\frac{7}{3}-\frac{2y}{3}\right)-5y=40 \Rightarrow \frac{28}{3}-\frac{8y}{3}-5y=40 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{8}{3}+5\right)y=\frac{28}{3}-40 \Rightarrow \frac{23}{3}y=\frac{28-120}{3} \Rightarrow \frac{23}{3}y=\frac{-92}{3} \Rightarrow 23y=$ $=-92 \Rightarrow y=-\frac{92}{23}=-4.$ Демек, берилген система үч бурчтук түрүнө келди: $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ \quad\;\; y = -4. \end{cases}$ (Бул системанын сол жагы үч бурчтукту элестетип турат). Эми $y=-4$ тү биринчи теңдемеге коюп, x ти табабыз: $3x+2(-4)=7 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5.$

Жообу: $x=5$, $y=-4$.

Үч бурчтук түрүнө келтирүү, айрыкча белгисиз чоңдуктардын саны үч же андан көп болсо, системанын чыгарылышын тез табуута болорун төмөнкү мисалдан көрөбүз.

2-м и с а л. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 6. \end{cases} \qquad (1)$$

Ч ы г а р у у. Биринчи теңдеменин эки жагын -3 кө көбөйтүп, аны системанын экинчи теңдемесине кошолу. Анда $-5y-8z=$ $=-18$ же

$$5y+8z=18. \qquad (2)$$

Эми системанын биринчи теңдемесин – 2 ге көбөйтүп, анын үчүнчү теңдемесине кошсок, анда $-3y-4z=-10$ же

$$3y + 4z=10 \qquad (3)$$

теңдемесин алабыз. Анда (1) системасын (2), (3) тү эске алганда, экинчи жана үчүнчү теңдемелери x ти кармабаган, төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ \quad 5y + 8z = 18, \\ \quad 3y + 4z = 10. \end{cases} \qquad (4)$$

(4) системасынын экинчи теңдемесин 3 кө, ал эми үчүнчү теңдемесин – 5 ке көбөйтүп жана аларды кошсок, анда $4z=4$ теңдемесин алабыз. Натыйжада (4) системасынан төмөнкү (1) системасына эквиваленттүү системага келебиз: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ \quad 5y + 8z = 18, \\ \qquad\quad z = 1. \end{cases}$ Демек, берилген система үч бурчтук түрүнө келтирилди. Мындан $z=1$ ди экинчи теңдемеге коюп, $5y+8 \cdot 1=18 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2$ экенин табабыз. Эми $y=2, z=1$ ди биринчи теңдемеге койсок: $x+2 \cdot 2+3 \cdot 1=8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=8-7=1$, $x=1$ келип чыгат.

Жообу: $x=1,\ y=2,\ z=1.$

Эми Гаусстун ордуна коюу методун иррационалдык теңдемелер системасын чыгарууга колдонуу мисалын келтирели.

3-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x + y = 28, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Биринчи теңдемеден: $y=28-x$ ти таап, экинчи теңдемеге койолу. Анда $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{28-x} = 4$. Бул иррационалдык теңдеменин эки жагын кубка көтөрөлү (теңдемени даражага көтөрүү методун колдонобуз). Анда $x+28-x+3\cdot \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{28-x}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{28-x}) =$ $=64$ же $28+3\cdot\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{28-x}\cdot 4=64$ же $\sqrt[3]{x\cdot(28-x)}=3$. Дагы бир жолу кубка көтөрүп, $x^2-28x+27=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан $x_1=1$, $x_2=27$ келип чыгат. Эми $y=28-x$ экенин эстесек, анда $y_1=28-x_1=28-1=27$, $y_2=28-x_2=28-27=1$ ди табабыз.

Жообу: $x_1=1,\ y_1=27,\ x_2=27,\ y_2=1.$

2. Крамердин аныктагычтар методу. Бул методду Крамердин аныктагычтар эрежеси деп да аташат. Бул методдун атын алып жүргөн Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцариялык ма-

тематик экенин 9-класстын «Алгебрасындагы» «Тарыхый маалыматтардан» билебиз.

Крамердин методун төмөнкү эки белгисиздүү эки теңдемелер системасын чыгаруу үчүн келтирели:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (*)$$

мында a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 – белгилүү сандар. Ал эми $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ бош мүчө вектору деп аталат.

Аныктама. Төмөнкү $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ санын (*) системасынын аныктагычы дейбиз жана аны $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ деп белгилейбиз. Бул аныктагыч экинчи тартиптеги аныктагыч деп аталат, себеби анын эки жолчосу жана эки мамычасы бар.

Демек, Δ аныктагычын табуу үчүн төмөнкү эреже колдонулат:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \qquad (\Delta)$$

Бул (Δ) формуласы ар кандай эле экинчи тартиптеги аныктагычты табуу үчүн колдонулат. Мисалы, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =2\cdot 7-(-4)\cdot 5=$ $=14+20=34$, $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} =\sin^2\alpha-(-\cos^2\alpha)=1$.

Эми (*) системасы үчүн төмөнкү эки аныктагычты кийирели:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}= b_1\cdot a_{22} - a_{12}\cdot b_2, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}= a_{11}\cdot b_2 - b_1\cdot a_{21}.$$

Бул аныктагычтар (*) системасынын Δ аныктагычынан алынат: Δ_1 де a_{11}, a_{21} (биринчи мамычанын элементтери деп аталат) сандары бош мүчө вектору (b_1; b_2) менен алмашылат, ал Δ_2 де a_{12}, a_{22} (экинчи мамычанын элементтери) бош мүчө вектору (b_1; b_2) менен алмашылат.

Крамердин аныктагычтар методу (эрежеси). Эгерде $\Delta \neq 0$ болсо, анда (*) сызыктуу системасы жалгыз чыгарылышка ээ жана ал чыгарылыш

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (**)$$

формуласы менен табылат.

Эскертүү! $\Delta=0$ болгондо Крамердин эрежеси колдонулбайт.

4-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Мында $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 20 - 14 = 6 \neq 0$. Демек, Крамердин методун же (**) формуласын колдонууга болот. Эми Δ_1, Δ_2 ни эсептейли: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 16 - 16 = 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 7 = 40 - 28 = 12$.

Натыйжада $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{0}{6} = 0$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2$.

Жообу: $x=0$, $y=2$.

Бул жооптун тууралыгын текшерели: $5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$, $4=4$, $7 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$, $8=8$. Демек, биз жогорку системаны туура чыгарганбыз.

5-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x - 11y = 8, \\ 2x + 9y = 1. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Эсептейли: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - (-11) \cdot 2 = 27 + 22 = 49 \neq 0$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -11 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 9 - (-11) \cdot 1 = 72 + 11 = 83$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 8 \cdot 2 = 3 - 16 = -13$. Демек, $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{83}{49}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-13}{49} = -\dfrac{13}{49}$.

Жообу: $x = \dfrac{83}{49}, -\dfrac{13}{49}$.

Текшерүү: $3 \cdot \dfrac{83}{49} - 11 \cdot \left(-\dfrac{13}{49}\right) = \dfrac{249 + 143}{49} = \dfrac{392}{49} = 8$, $8=8$,

$2 \cdot \dfrac{83}{49} + \dfrac{(-13) \cdot 9}{49} = \dfrac{166 - 117}{49} = \dfrac{49}{49} = 1$, $1=1$. Демек, биз тапкан чыгарылыш туура.

Жогоруда келтирилген Δ аныктагычы негизги аныктагыч, ал эми Δ_1, Δ_2 аныктагычтары кошумча аныктагычтар деп аталат.

3. Алгебралык кошуу методу. Бул методдун идеясы Гаусстун методу менен байланышкан жана анын мазмунун түшүнүү үчүн мисал келтирели.

Алгебралык кошуу +, − ту билдирерин эскерте кетели.

6-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Бул система − иррационалдык теңдемелер системасы. Анын АО: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Адегенде бул системанын теңдемелерин кошолу, анда $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3+1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x=4$. Эми системанын биринчи теңдемесинен анын экинчи теңдемесин кемитсек, анда $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x} - (-\sqrt{y}) = 3 - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y=1$. Демек, $x=4$, $y=1$ − берилген системанын чыгарылышы.

Жообу: $x=4$, $y=1$.

7-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 11, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын АО: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Бул системанын экинчи теңдемесин 4 кө көбөйтүп, анын биринчисине кошсок, анда $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} + 12\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 11+28 \Rightarrow 13\sqrt{x} = 39 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=9$ келип чыгат. Эми системанын биринчи теңдемесин 3 кө көбөйтүп, келип чыккан теңдемеден системанын экинчи теңдемесин кемители. Анда $3\sqrt{x} + 12\sqrt{y} - 3\sqrt{x} - (-\sqrt{y}) = 33-7 \Rightarrow$ $\Rightarrow 13\sqrt{y} = 26 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y=4$.

Жообу: $x=9$, $y=4$.

8-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын экинчи теңдемесин 3 кө көбөйтүп, анын биринчи теңдемесине кошолу:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 65 + 60. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ (x+y)^3 = 125 = 5^3. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ x + y = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5xy = 20, \\ x + y = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Келип чыккан системаны Гаусстун ордуна коюу методу менен чыгарсак болот (чыгарып көргүлө). Анда $x_1=4$, $y_1=1$, $x_2=1$, $y_2=4$ чыгарылыштарына келебиз.

Жообу: (4; 1), (1; 4).

4. Жаңы белгисиздерди киийрүү методу.

Бул методду иррационалдык теңдемелерди чыгарууда кеңири колдонгонбуз. Системаларды чыгарууга мисалдар келтирели.

9-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^{-1} - y^{-1} = 2, \\ x^{-2} - y^{-2} = 16. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Системанын АО: $x \neq 0$, $y \neq 0$. Жаңы u, v белгисиздерин кийирели: $x^{-1}=u$, $y^{-1}=v$. Анда берилген системадан $\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ (u+v)(u-v) = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ 2(u+v) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ u + v = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ 2u = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 3 \end{cases}$ келип чыгат. Эми $u=x^{-1}$, $v=y^{-1}$ экенин эске алсак, анда $x^{-1}=5$, $y^{-1}=3$ же $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{3}$ чыгарылышын алабыз.

Жообу: $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$.

10-*м и с а л*. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8. \end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Адегенде чыгаралы, анан текшерүү жүргүзөлү. Жаңы u, v белгисиздерин кийиребиз: $\sqrt[4]{x+y}=u$, $\sqrt[4]{x-y}=v$. Анда берилген системадан $\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 8 \end{cases}$ системасына келебиз. Бул системаны 9-мисалдагыдай эле ыкма менен чыгарсак, анда $u=3$, $v=1$ ди алабыз. (Өз алдыңарча чыгарып, текшерип көргүлө!).

Эми $u=\sqrt[4]{x+y}$, $v=\sqrt[4]{x-y}$ экенин эске алып, $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 3, \\ \sqrt[4]{x-y} = 1 \end{cases}$ системасына келебиз. Теңдемелерин төртүнчү даражага көтөрүп, $\begin{cases} x + y = 81, \\ x - y = 1 \end{cases}$ сызыктуу теңдемелер системасын алабыз. Системанын теңдемелерин кошсок, анда $\begin{cases} x + y = 81, \\ 2x = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 41, \\ y = 40. \end{cases}$

Текшерүү жүргүзөлү: $\sqrt[4]{41+40} - \sqrt[4]{41-40} = \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{1} = 3 - 1 = 2$, $2=2$; $\sqrt[4]{41+40} - \sqrt[4]{41-40} = \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8$, $8=8$. Демек, чыгарылыш туура табылган.

Жообу: (41; 40).

Э с к е р т ү ү: *а*) 5- , 6-мисалдарда $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$ деп жаңы u, v белгисиздерин кийирсек, анда биз u, v га карата сызыктуу теңдемелер системаларын алабыз. Аларды Гаусстун же Крамердин методдору менен чыгарсак болот.

б) Жаңы белгисиздерди кийирүү методун бир тектүү теңдемелер системаларын жана симметриялуу теңдемелер системаларын чыгарууга колдонсок болот. Бул жөнүндө кеңири материалды 9-класстын «Алгебрасында» бергенбиз.

5. Көбөйтүү жана бөлүү методу. Бул методдун мазмуну:

Эгерде АО да системанын теңдемелеринин биринин эки жагы тең нөлгө барабар болбосо, анда бул теңдемеге системанын калган теңдемелерин көбөйтүүгө жана бөлүүгө болот. Мисалдар келтирели.

11-м и с а л. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\(x+y)xy=120.\end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Бул системанын АО: $x, y\in R$. Ошондой эле $x=0$, $y=0$ бул системаны канааттандырбайт. Демек, $x\neq 0$, $y\neq 0$ деп карасак болот. Анда системанын биринчи теңдемесин анын экинчисине бөлсөк болот:

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\ \dfrac{(x-y)xy}{(x+y)xy}=\dfrac{30}{120}.\end{cases} \qquad (*)$$

Бул системанын экинчи теңдемесинен: $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow 4x-4y=$ $=x+y \Rightarrow 3x=5y \Rightarrow$ $y=\dfrac{3x}{5}$. Табылган y ти (*) системасынын биринчи теңдемесине койсок, анда $(x-\dfrac{3x}{5})\,x\;\dfrac{3}{5}x=30 \Rightarrow$ $\dfrac{6}{25}x^3=30 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $x^3=125=5^3 \Rightarrow x=5$ келип чыгат. Эми $y=\dfrac{3x}{5}$ тен $y=\dfrac{3\cdot 5}{5}=3$ тү алабыз. Демек, $x=5$, $y=3$ – чыгарылыш.

Жообу: (5; 3).

12-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Системанын биринчи теңдемесине анализ жүргүзөлү. Анын сол жагы $y=0$ болгондо нөлгө айланат. Ошондой эле $y=0$, $x=0$ дө анын оң жагы нөлгө барабар, бирок анын сол жагы $x=0$ болгондо аныкталбайт. Демек, биринчи теңдеменин эки жагын тең нөлгө айландыруучу $(x;\ y)$ти табууга болбойт. Ошондуктан, берилген системанын биринчи теңдемесин анын экинчи теңдемесине көбөйтүүгө болот. Көбөйтүүнүн жыйынтыгын биринчи теңдеменин ордуна жазып, ал эми экинчи теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, төмөнкү системага келебиз:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = (\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}), \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases} \qquad (**)$$

Бул системанын биринчи теңдемесинен $8=x+y-(x-y)$ же $y=4$тү табабыз. Бул табылган yти (**) нын экинчи теңдемесине койсок, анда

$$\sqrt{\frac{4x}{5}} = \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} \qquad (***)$$

иррационалдык теңдемесине келебиз. Бул теңдеменин АО: $x\geq 0$, $x+4 \geq 0$, $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$. Эми (***) теңдемесин даражага (квадратка) көтөрүү методу менен чыгаралы: $\left(\sqrt{\dfrac{4x}{5}}\right)^2 = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})^2 \Rightarrow \dfrac{4x}{5} = x+4 - 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-4}+x-4 \Rightarrow 3x=5\sqrt{x^2-16}$.

Дагы квадратка көтөрөлү: $25x^2 - 400= 9x^2 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x_1=5$, $x_2= - 5$. Мындагы $x_2= - 5$ (***) теңдемесинин АОсуна кирбейт, б. а. чет тамыр болот. Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы $x=5$, $y=4$.

Жообу: (5; 4).

Э с к е р т ү ү. Теңдемелер системасын график методу менен чыгарууга болот. Буга биз 9-класстын «Алгебрасында» токтолгонбуз. Демек, 9-класстын «Алгебрасын» кайталоо зарылчылыгы бар.

Суроолор

1) Теңдемелер системасы деген эмне?

2) Теңдемелер системасынын чыгарылышы деген эмне?

3) Алгебралык теңдемелер системасын чыгаруунун негизги методдорун атагыла.

Көнүгүүлөр

107. Теңдемелер системасын Гаусстун жана Крамердин методдорун колдонуп чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 2y = 7; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 11x - 5y = 37, \\ 4y - x = 25; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = -5, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = 3. \end{cases}$

108. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 9; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 2x + y - z = 6, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x + 2y - 5z = 9. \end{cases}$

109. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{xy} = 10; \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

110. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$

Көрсөтмө: Алгебралык кошуу методун колдонсо болот.

111. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y} + \sqrt{2x - 3y} = 10, \\ \sqrt{4x^2 - 9y^2} = 16; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а)* $\sqrt{2x+3y} = u$, $\sqrt{2x-3y} = v$; *б)* экинчи теңдемесинин эки жагынан куб тамыр чыгарып, анан $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ деп алгыла.

112. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ y(x + y) = 16; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{\frac{2y}{x}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а*) Бөлүү, *б*) көбөйтүү методун колдонсо болот.

Тест

113. Теңдемелер системасынын чыгарылышынын суммасын

тапкыла: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$

а) 1; *б*) 1,4; *в*) 1,5; *г*) 1,6; *д*) 2.

114. Теңдемелер системасы $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$ үчүн $x_0 \cdot y_0$ ду таппкыла, мында $(x_0; y_0)$ – кандайдыр бир чыгарылыш.

а) -1; *б*) -4; *в*) -6; *г*) 2; *д*) 5.

115. Теңдемелер системасы $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases}$ үчүн $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ ни тапкыла, мында $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – анын чыгарылыштары.

а) 160; *б*) 164; *в*) 168; *г*) 182; *д*) 190.

§ 6. Алгебралык барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу

Бир нече алгебралык барабарсыздыктар системасы берилсин. Белгисиз чоңдуктардын саны бирөө, экөө же андан да көп болушу мүмкүн. Биз төмөндө бир белгисиздүү алгебралык барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу мисалдарын келтиребиз жана эки белгисиздүү барабарсыздыктар системаларынын чыгарылыштары жөнүндө түшүнүк беребиз.

Барабарсыздыктардын системасынын чыгарылыштарын табуу үчүн АОдо анын ар бир барабарсыздыгын канааттандырган белгисиз чоңдуктардын маанилеринин көптүктөрүн таап, анан ал көптүктөрдүн жалпы бөлүгүн аныктап коюш керек экенин эске түйүп коёлу. Демек, бир белгисиздүү барабарсыздыктардын системасынын чыгарылышы – бул системанын АОсунда ар бир барабарсыздыгын туура сан барабарсыздыгына айландыруучу белгисиз чоңдуктун маанилеринин көптүгү.

1- м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2 \le 16, \\ x > 0. \end{cases}$$

Чыгаруу. АО: $x>0$. Биринчи барабарсыздыктан $|x| \le 4 \Rightarrow -4 \le$

$\leq x \leq 4$ келип чыгат. Анда берилген системанын чыгарылышы: $[-4;\ 4] \cap (0;\ \infty) = (0;\ 4]$.

Жообу: $x \in (0;\ 4]$.

2-м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[5]{4x} > 1, \\ \dfrac{x}{4-x} > 0. \end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Бул системанын АОсун табалы. Биринчи барабарсыздыктын АО: $x-1 \geq 0$, $1-x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $x \leq 1 \Rightarrow x=1$. Ал эми экинчи барабарсыздыктын АО: $4-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Анда берилген системанын АО: $\{1\} \cap \{x \neq 4\} = 1$, б. а. бир гана $x=1$ санынан турат. Белгисиздин бул мааниси берилген барабарсыздыктардын системасын канаатандырабы?

Ушуну текшерип көрөлү: $\sqrt{1-1} + \sqrt[4]{1-1} + \sqrt[5]{4 \cdot 1} = \sqrt[5]{4} > 1$, $\dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3} > 0$. Канааттандырарын көрдүк.

Жообу: $x=1$.

3-м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 1, \\ \sqrt[3]{x-2} > 5. \end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Бул системанын АО: $x \geq 0$. Биринчи барабарсыздыктан $x>1$ (квадратка көтөрдүк) келип чыгат. Экинчи барабарсыздыкты кубка көтөрсөк, анда $x-2 < 5^3$, $x-2<125 \Rightarrow$ $\Rightarrow x<125+2=127$.

Анда изделүүчү чыгарылыш: $(1;\ \infty) \cap (-\infty;\ 127) = (1;\ 127)$.

Жообу: $x \in (1;\ 127)$.

4-м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-2)} > 0, \\ \dfrac{1}{(x-4)(x-5)} < 0. \end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Бул системанын АО: $x+1 \neq 0$, $x-2 \neq 0$, $x-4 \neq 0$, $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $x \neq 2$, $x \neq 4$, $x \neq 5$. Интервалдар методун колдонуп берилген системаны чыгаралы. Биринчи барабарсыздыктын чыгарылышы: $(-1;\ 2) \cup (3;\ \infty)$, ал эми экинчи барабарсыздыктыкы: $(4;\ 5)$. (Муну өзүңөрчө чыгарып, текшерип көргүлө). Анда изделүүчү чыгарылыш: $(-1;\ 2) \cup (3;\ \infty) \cap (4;\ 5) = (4;\ 5)$.

Жообу: $4<x<5$.

5-м и с а л. Барабарсыздыкты канааттандырган x тин эң кичине бүтүн маанисин тапкыла: $1\le\frac{x+1}{2-x}<3$.

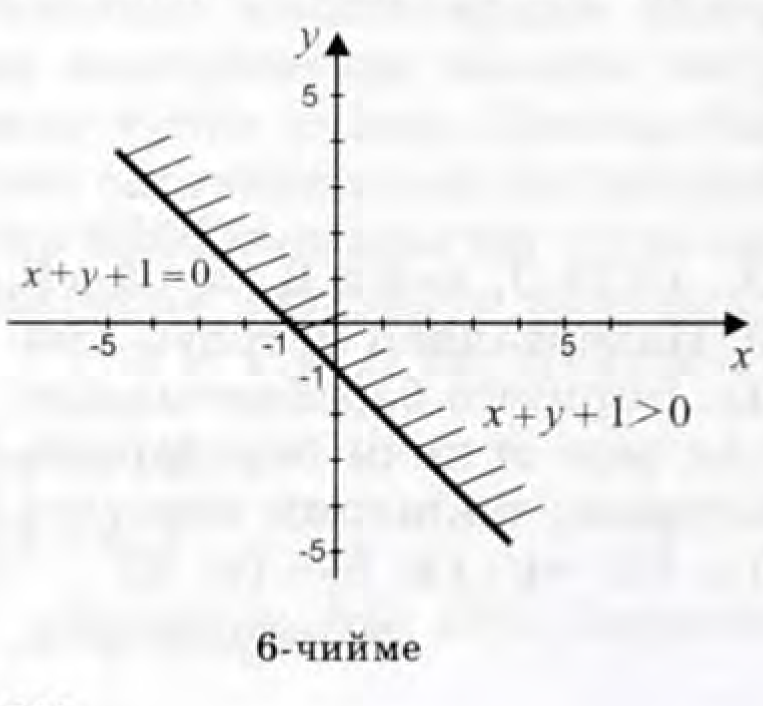
Ч ы г а р у у. Бул барабарсыздыктын АО: $x\neq 2$. Берилген барабарсыздыктан $\begin{cases}\frac{x+1}{2-x}\ge 1,\\ \frac{x+1}{2-x}<3\end{cases}$ рационалдык барабарсыздыктар системасы келип чыгат. Бул барабарсыздыктан:

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2-x}-1\ge 0,\\ \frac{x+1}{2-x}-3<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x+1-(2-x)}{2-x}\ge 0,\\ \frac{x+1-3(2-x)}{2-x}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{2x-1}{2-x}\ge 0,\\ \frac{4x-5}{2-x}<0.\end{cases}$$

Интервалдар методун колдонсок, анда алынган системанын биринчи барабарсыздыгынын чыгарылышы $x\in\left(\frac{1}{2};\,2\right)$, ал эми экинчи барабарсыздыгыныкы: $x\in\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)\cup(2;\,\infty)$. Демек, $\left(\frac{1}{2};\,2\right)\cap$ $\cap\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)\cup(2;\,\infty)=\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right)$ – берилген системанын чыгарылышы болот. Мындан $x=1$ изделүүчү эң кичине бүтүн маани.

Жообу: $x=1$.

Эми эки белгисиздүү алгебралык барабарсыздыктардын системасын чыгарууга токтололу. Мындай барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу бир белгисиздүү барабарсыздыктар системасын чыгаруудагыдай оңой эмес. Бул учурда график методу негизги метод болуп саналат. Демек, xOy тегиздигинде берилген барабарсыздыктардын графиктерин чийип, анан ал графиктердин кесилиштеринин жалпы бөлүгүн штрихтеп, x, y тердин штрихтелген облустагы көптүгү берилген системанын чыгарылышы экенин көрөбүз.



6-чийме

6-м и с а л. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}x+y+1\ge 0,\\ x^2+y^2\le 25.\end{cases}$$

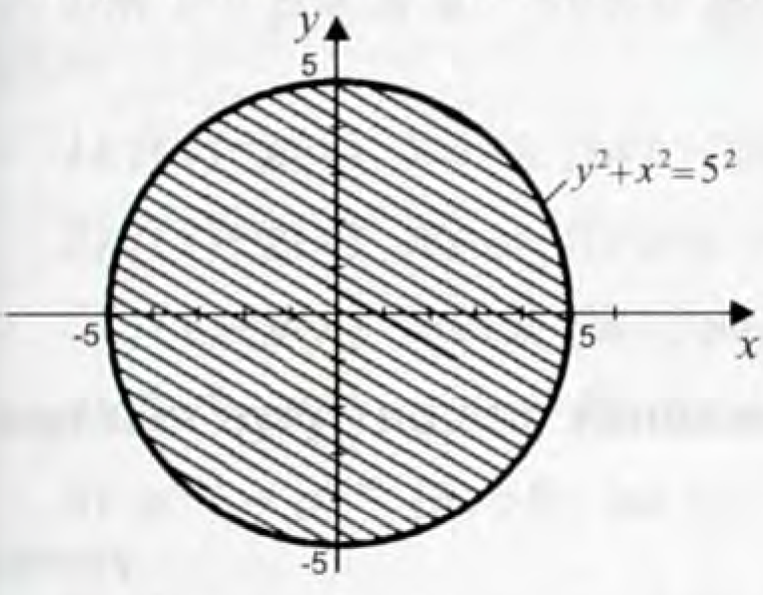
Ч ы г а р у у. Мында $x+y+1\ge 0$ координата башталмасын $O(0;\ 0)$

камтыган $x+y+1=0$ түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздик (6-чийме).

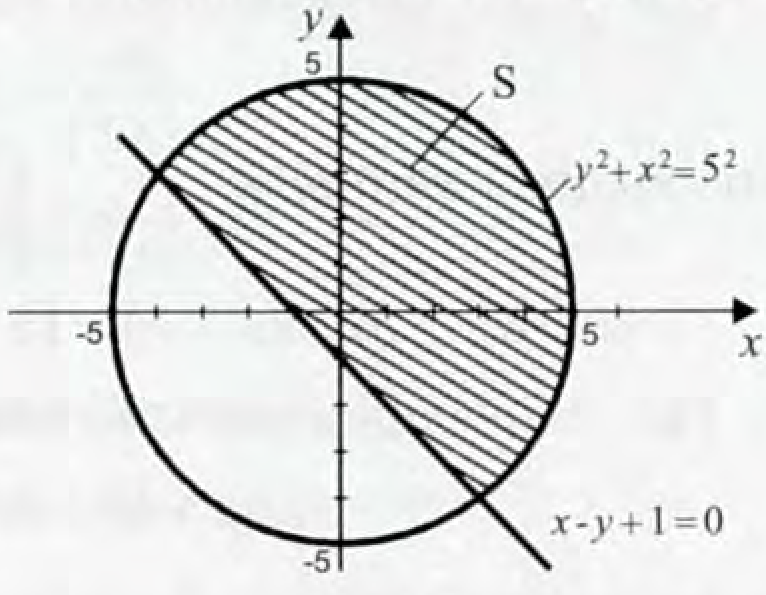
Ал эми $x^2+y^2=5^2$ айланасынын ички бөлүгү – $x^2+y^2\leq 5^2$ (тегерек, 7-чийме)): Анда чыгарылыш төмөнкү штрихтелген облус (8-чийме).

Жообу: S –штрихтелген облус.

Демек, эки белгисиздүү барабарсыздыктардын системасынын чыгарылышын табуу үчүн график методун жакшы билүү керек.



7-чийме



8-чийме

Дагы бир айтарыбыз: барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу илим менен техниканын көптөгөн тармактарында колдонулат, маселен экономикалык маселелерди чыгарууда.

Суроолор

1) Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы деген эмне?

2) Барабарсыздыктардын системаларын чыгаруунун кандай методдорун билесинер?

Көнүгүүлөр

116. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}(x-1)^2\leq 16,\\ x>2;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}x^2-x-6\geq 0,\\ x^2-4x<0.\end{cases}$

117. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[6]{x-3}>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x-6}{x+2}<0;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}\sqrt[3]{x-5}<2,\\ \sqrt{x+1}>3.\end{cases}$

118. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $0<\dfrac{3x-1}{2x+5}<1;$ *б)* $1\leq\dfrac{2-x}{x+1}\leq 2.$

119. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1, \\ x^2+y^2 \leq 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y \leq 1, \\ x^2+y^2 \leq 9. \end{cases}$

Тест

120. Барабарсыздыктар системасынын эң кичине бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geq 0, \\ \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

а) –3; б) –2; в) –1; г) 0; д) 1.

121. Барабарсыздыктар системасынын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\begin{cases} x(x+5) > 6, \\ 1-\dfrac{x}{3} > 0{,}1-0{,}25x. \end{cases}$

а) 4; б) 5; в) 8; г) 10; д) 12.

§ 7. Теңдемелер, барабарсыздыктар жана системалардын тең күчтүүлүгү. Тең күчтүү өзгөртүүлөр. Теңдеме – натыйжа. Теңдемелердин тамырларынын жоголушуна алып келүүчү өзгөртүүлөр

Теңдеме жана барабарсыздыктарды чыгарууда ар кандай өзгөртүүлөрдү жүргүзүүгө туура келери бизге белгилүү. Ал эми өзгөртүүлөр ар кандай (тең күчтүү, тең күчтүү эмес) болушу мүмкүн экенин да көрдүк. Бул параграфта жалпылоочу материал катары ушул жөнүндө кеп кылалы.

Бизге төмөнкү эки теңдеме берилсин дейли:

$$f_1(x)=g_1(x), \qquad (1)$$

$$f_2(x)=g_2(x). \qquad (2)$$

1-а н ы к т а м а. Эгерде (1) жана (2) теңдемелеринин тамырларынын көптүктөрү дал келишсе, анда алар тең күчтүү (эквиваленттүү) деп аталышат. Ошондой эле эгерде (1) жана (2) теңдемелеринин тамырлары жок болсо, анда да алар тең күчтүү болушат. Ошондой эле (1) жана (2) тең күчтүү болушса, анда (1) $\Leftrightarrow$ (2) деп белгилешет.

Мисалы, $x-1=0$ жана $x^3-1=0$ теңдемелери тең күчтүү, себеби $x=1$ алардын ар биринин тамыры; $x^2+1=0$ жана $\sqrt{x}+1=0$ теңдемелери да тең күчтүү, анткени алардын тамырлары жок.

Э с к е р т ү ү. Теңдеме жана барабарсыздыктардын чыныгы тамырлары жана чыгарылыштары жөнүндө сөз болорун айта кетели.

Теңдемелерди чыгарууда аларды жөнөкөйлөтүп, ага тең күчтүү теңдемелерге келтирүүгө аракет кылуу керек.

Биз төмөндө теңдемелерди тең күчтүү теңдемелерге алып келүүчү кээ бир (негизги) өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө келтирели.

1-т е о р е м а. Бизге $f(x)=g(x)$ теңдемеси берилсин дейли. Анда

1) $f(x)=g(x)$ жана $f(x)-g(x)=0$;

2) $f(x)=g(x)$ жана $f(x)+a=g(x)+a$ $(a \in R)$;

3) $f(x)=g(x)$ жана $af(x)=ag(x)$, $a \neq 0$, $a \in R$;

4) $f(x)=g(x)$ жана $f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x)$ $(n \in N)$;

5) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ жана $f(x)=g(x)$ теңдемелери тең күчтүү.

6) Эгерде кандайдыр бир A көптүгүндө $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ болсо, анда бул көптүктө $f(x)=g(x)$ жана $f^n(x)=g^n(x)$ $(n \in N)$ теңдемелери тең күчтүү.

7) Эгерде $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары кандайдыр бир A көптүгүндө оң болушса: $f(x)>0$, $g(x)>0$, анда A көптүгүндө $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ жана $f(x)=g(x)$ теңдемелери тең күчтүү. Маселен, эгерде $b>0$ болсо, анда $a^{h(x)}=b$ жана $h(x)=\log_a b$ теңдемелери тең күчтүү.

8) Эгерде $f(x)=g(x)$ теңдемесинин АОсунда жаткан A көптүгүндө $y=\varphi(x)$ функциясы аныкталса жана $\neq 0$ болсо, анда A көптүгүндө $f(x)=g(x)$ жана $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ теңдемелери тең күчтүү.

1-теореманын 7) тыянагында А көптүгү $f(x)=g(x)$ теңдемесинин АОсу менен дал келип калышы мүмкүн.

1-теореманын жети пунктунун ар бирин теңдемелерди тең күчтүү өзгөртүү жүргүзүү эрежеси катары карасак болот.

1-м и с а л. Төмөнкү теңдемелер тең күчтүүбү?:

а) $2x-3=5-2x$ жана $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{5-2x}{x-1}$;

б) $\dfrac{1}{2}x+6=3x-4$ жана $(\dfrac{1}{2}x+6)(x^2+7)=(3x-4)(x^2+7)$.

Ч ы г а р у у. 1-теореманын 8) эрежесин колдонсок, анда *а)* жана *б)* учурларында тең бирдей: ооба, тең күчтүү деген жоопту алабыз. Мында *а)* учурунда $A=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$, ал эми *б)* учурунда $A=R$.

2-а н ы к т а м а. Эгерде

$$f_1(x)<g_1(x) \qquad (3)$$

жана

$$f_2(x)<g_2(x) \qquad (4)$$

барабарсыздыктарынын чыгарылыштарынын көптүктөрү дал келишсе, анда алар тең күчтүү деп аталат. Эгерде (3), (4) барабарсыздыктарынын ар биринин чыгарылыштары жок болсо да, анда алар тең күчтүү болуп саналышат. Ошондой эле $f_1(x)<g_1(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_2(x)<g_2(x)$ (1) жана (2) барабарсыздыктары тең күчтүү дегенди билдирет.

Маселен, $\frac{1}{x-1}<0$ жана $\frac{x^2+1}{x-1}<0$ барабарсыздыктары тең күчтүү, анткени эки барабарсыздыктын тең чыгарылышы $x\in(-\infty;\ 1)$.

Төмөндө барабарсыздыктарды тең күчтүү барабарсыздыктарга алып келүүчү негизги өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө берели.

2-теорема. (Барабарсыздыктардын тең күчтүүлүгү жөнүндө). Төмөнкү барабарсыздыктар:

1) $f(x)<g(x)$ жана $g(x)>f(x)$;

2) $f(x)<g(x)$ жана $f(x)-g(x)<0$;

3) эгерде $\varphi(x)$ функциясы $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда аныкталса, анда $f(x)<g(x)$ жана $f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x)$; маселен, $f(x)<g(x)$ жана $f(x)+a<g(x)+a$ $(a\in R)$;

4) $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ жана $f(x)g(x)>0$;

5) $\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)}$ $(n\in N)$ жана $f(x)<g(x)$;

6) $f^{2n}(x)<g^{2n}(x)$ $(n\in N)$ жана $|f(x)|<|g(x)|$;

7) эгерде $a\in(1;\ \infty)$ болсо, анда $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ жана $f(x)>g(x)$;

8) эгерде $a\in(0;\ 1)$ болсо, анда $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ жана $f(x)>g(x)$;

9) эгерде А көптүгүндө $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ болсо, анда бул көптүктө $f(x)>g(x)$ жана $f^n(x)>g^n(x)$ $(n\in N)$;

10) эгерде $a\in(1;\ \infty)$ жана А көптүгүндө $f(x)>0$, $g(x)>0$ болсо, анда бул А көптүгүндө $f(x)>g(x)$ жана $\log_a f(x)>\log_a g(x)$;

11) эгерде $a\in(0;1)$ жана А көптүгүндө $f(x)>0$, $g(x)>0$ болсо, анда бул А көптүктө $f(x)>g(x)$ жана $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ тең күчтүү.

12) Эгерде $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда $\varphi(x)>0$ болсо, анда $f(x)<g(x)$ жана $\varphi(x)f(x)<\varphi(x)g(x)$ барабарсыздыктары тең күчтүү. Эгерде $f(x)<g(x)$ барабарсыздыгынын АОсунда $\varphi(x)<0$ болсо, анда $f(x)<g(x)$ жана $\varphi(x)f(x)>\varphi(x)g(x)$ барабарсыздыктары тең күчтүү.

Маселен, α – оң сан болсо, анда $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x)<\alpha g(x)$; α – терс сан болсо, анда $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x)>\alpha g(x)$.

2-теореманын 12 пунктунун ар бирин барабарсыздыктарды тең күчтүү өзгөртүп түзүү эрежеси катары карасак болот.

2-м и с а л. Төмөнкү барабарсыздыктар тең күчтүүбү?:

а) $x^3<-1$ жана $x<-1$;

б) $-\frac{1}{4}(1-x)<-\frac{1}{4}(4x-3)$ жана $1-x>4x-3$.

Ч ы г а р у у. Бул эки учурда тең: ооба, тең күчтүү деген жоопту алабыз. Мында *а)* учурунда 2-теореманын 5) эрежесинин негизинде (эмне үчүн экенин ойлонуп көргүлөчү!), ал эми б) учурунда 2-теореманын 12) эрежесинин негизинде.

3-а н ы к т а м а. Эгерде берилген эки теңдемелер системаларынын чыгарылыштарынын көптүктөрү дал келсе, анда мындай теңдемелер системалары тең күчтүү деп аталышат.

Теңдемелер системаларын тең күчтүү өзгөртүү 1-теорема менен тыгыз байланышкан. Муну эстеп калуу үчүн төмөнкү теореманы билүү керек.

3-т е о р е м а. Бизге эки белгисиздүү чоңдуктары бар эки теңдемеден турган система берилсин дейли. Эгерде бул системанын бир теңдемесин өзгөртпөй калтырып, ал эми экинчи теңдемесин теңдеш өзгөртсөк, анда келип чыккан теңдемелер системасы берилген теңдемелер системасына тең күчтүү болот.

Н а т ы й ж а. Эгерде берилген системанын ар бир теңдемесин теңдеш өзгөртсөк, анда алынган система берилген системага тең күчтүү болот.

Теңдеш өзгөртүүлөрдү 5-параграфта теңдемелер системасын чыгарууда кеңири пайдаланганбыз. Маселен, төмөнкү теоремага негизделген алгебралык кошуу методун.

4-т е о р е м а. Бизге эки белгисиздүү эки теңдемеден турган система берилсин дейли. Эгерде бул системанын бир теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, ал эми экинчи теңдемесин системанын эки теңдемесинин суммасы же айырмасы менен алмаштырсак, анда алынган система берилген системага тең күчтүү болот.

3-м и с а л. Төмөнкү теңдемелер системалары тең күчтүүбү?

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2,\\ 3\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6\end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2,\\ 4\sqrt{x+y}=8\end{cases}$$

Ч ы г а р у у. Ооба, тең күчтүү. Биз берилген системанын биринчи теңдемесин өзгөртүүсүз калтырып, ал эми экинчи теңдемесин биринчи жана экинчи теңдемелердин суммасы менен алмаштырдык. Анда 4-теореманын негизинде алынган жана берилген системалар тең күчтүү болушат.

Э с к е р т ү ү. Барабарсыздыктардын системаларынын тең күчтүүлүгү 2-теоремага негизделген жана бул учурда да 3-теорема жана анын натыйжасы сыяктуу эле теорема жана анын натыйжасын келтирүүгө болот. (Бул жөнүндө өз алдыңарча ой жүгүрткүлө!).

Эми «теңдеме – натыйжа» деген түшүнүккө токтололу.

4-а н ы к т а м а. Бизге жогорудагыдай эле (1) жана (2) теңдемелери берилсин дейли. Эгерде (1) теңдемесинин ар бир тамыры (2) теңдемесинин тамыры болсо, анда (2) теңдемеси биринчи теңдеменин натыйжасы деп аталат, б. а. (2) теңдемеси (1) теңдемеси үчүн «теңдеме – натыйжа» деп аталат.

Э с к е р т ү ү. Теңдеме – натыйжага өткөндө берилген теңдеменин тамыры жоголбойт, бирок берилген теңдемеге чет тамыр пайда болушу мүмкүн.

Демек, теңдеме – натыйжаны чыгарып, анын тамырлары берилген теңдемени «канаатандырабы же жокпу» текшерип коюш керек.

Теңдеме –натыйжага алып келүүчү кээ бир өзгөртүүлөрдү теорема түрүндө берели.

5-т е о р е м а. 1) $f^{2n}(x)= g^{2n}(x)$ $(n\in N)$ теңдемеси $f(x)= g(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

2) $f(x)= g(x)$ теңдемеси $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ теңдемесинин натыйжасы;

3) $f(x)= g(x)\varphi(x)$ теңдемеси $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

4) $f(x)= g(x)$ теңдемеси $f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$ теңдемесинин натыйжасы;

5) $f(x)=0$, $g(x)=0$ теңдемелеринин жыйындысы $f(x)g(x)=0$ теңдемесинин натыйжасы.

Э с к е р т ү ү. Эгерде кандайдыр бир теңдеменин тамыры жок болсо, анда бул теңдеме үчүн каалагандай башка теңдеме «теңдеме – натыйжа» боло алат.

4-*м и с а л.* Төмөнкү теңдемелердин кайсысы башкасынын натыйжасы?:

а) $\sqrt{x}=-2$ жана $|x|=-1$; *б)* $\sqrt{x-1}=3$ жана $x^2-100=0$.

Ч ы г а р у у. а) учурунда берилген эки теңдеменин тең чыныгы тамыры жок, ошон үчүн алар бирине бири натыйжа боло алат. Демек, алар тең күчтүү; *б)* учурунда экинчи теңдеме биринчинин натыйжасы, себеби биринчи иррационалдык теңдеменин тамыры $x=10$ экинчи теңдеменин да тамыры. Ал эми экинчи теңдеменин эки тамыры бар: $x=10$, $x=-10$.

Э с к е р т ү ү. 4-аныктамасы сыяктуу эле «барабарсыздык – натыйжа» деген түшүнүктү кийирсе болот. (Бул жөнүндө өзүңөр ойлонуп көргүлөчү!). Маселен, $x<0$ барабарсыздыгынын натыйжасы $|x|>0$ барабарсыздыгы болот, себеби $|x|>0 \Rightarrow x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.

Биз жогоруда «теңдеме – натыйжаны» берүүчү өзгөртүүлөр берилген теңдеме үчүн чет тамырларды пайда кылышы мүмкүн дедик. Эми кандай өзгөртүүлөр берилген теңдеменин тамырларынын жоголушуна алып келиши мүмкүн? деген суроо коёлу жана бул суроого жооп издейли.

Тамырлардын жоголушу негизинен кээ бир формулаларды алардын колдонуу шарттарын эсепке албай эле колдоно бергенден келип чыгат. Бул учурда берилген теңдеменин АОсу тарып кетиши мүмкүн. Кээ бир өзгөртүүлөргө токтололу.

1. Теңдеменин эки жагын белгисиз чоңдукту кармаган көбөйтүүчүгө кыскартуу. Бул учурда бул көбөйтүүчүнү нөлгө айландыруучу тамырлар жоголуп кетиши мүмкүн.

2. Жаңы (бөлөк) негиздеги логарифмага өтүү. Эгерде жаңы негиз $c>0$ жана $c \neq 1$ шартын канаатандырбаса, анда бул негизге өтүү тамырлардын жоголушуна алып келет.

3. Логарифмалоонун формулаларын колдонуу туура эмес жүргүзүлсө, тамырлар жоголуп кетиши мүмкүн.

4. Сол жагы жана оң жагы ар түрдүү аныкталуу облустарына ээ тригонометриялык формулаларды колдонуу.

Айрым мисалдарга токтололу.

5-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $(x-2)\sin x=0$.

Ч ы г а р у у. Эгерде бул теңдеменин эки жагын тең $\sin x$ ке бөлүп жиберсек, анда $x-2=0 \Rightarrow x=2$ тамырына ээ болобуз жана $x=k\pi$, $k\in Z$ тамырын жоготуп жиберген болобуз, себеби биз $x=k\pi$, $n\in Z$ де нөлгө айлануучу $\sin x$ ке берилген теңдемени бөлүп жибердик эле. Демек, $\sin x$ ке бөлүү жарабайт.

Бул теңдеменин жообу: $x=2$, $x=k\pi$, $k\in Z$.

6-*м и с а л.* Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 100, \\ xy = 1000. \end{cases}$

Ч ы г а р у у. Даражаны жана көбөйтүндүнү логарифмалайлы, б. а. биринчи жана экинчи теңдемени 10 негизи боюнча логарифмалайлы. Анда $\begin{cases} \lg|y| \cdot \lg|x| = 2, \\ \lg x + \lg y = 3 \end{cases}$ же $\begin{cases} \lg y \cdot \lg x = 2, \\ \lg x + \lg y = 3 \Rightarrow x_1 = 100, y_1 = 10 \end{cases}$ жана $x_2=10$, $y_2=100$ тамырларына ээ болобуз. Биз бул учурда $x_3=-100$, $y_3=-10$, $x_4=-10$, $y_4=-100$ тамырларын жоготуп жибердик, анткени xy ти логарифмалаганда $x<0$, $y<0$ учурун эсепке албадык; биз $\lg(xy)=\lg|x|+\lg|y|$ формуласын колдонсок, анда бардык тамырларды туура тапкан болот элек, себеби $\begin{cases} \lg|y| \cdot \lg|x| = 2, \\ \lg|x| + \lg|y| = 3 \end{cases}$ системасын чыгарат элек да.

7-*м и с а л.* Теңдемени чыгаргыла: $3\sin x - \cos x=1$.

Ч ы г а р у у. Эгерде $\sin x=\dfrac{2\text{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\text{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ (*)

формулаларын пайдалансак, анда берилген теңдеме $\text{tg}\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$ теңдемесине келет. Мындан $x=2\text{arctg}\,\dfrac{1}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ чыгарылышына ээ болобуз. Эгерде ушул жооп менен эле чектелип калсак, анда биз дагы бир тамырды жоготуп жиберишибиз мүмкүн. Анткени, (*) формулаларын колдонгондо биз $\sin x$, $\cos x$ тин ($x\in R$) АОлорун тарытып жибердик, себеби (*) нын оң жагы $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ болгондо нөлгө айланат. Демек, x тин бул маанилеринде берилген теңдемени текшерип коюш керек ($x=\pi$ де текшерүү жетиштүү, анткени $\sin x$, $\cos x$ тин мезгили $2n\pi$ эмеспи): $3\sin\pi-$ $-\cos\pi=1\Rightarrow-(-1)=1\Rightarrow 1=1$. Канааттандырат экен.

Жообу: $x=2\text{arctg}\,\dfrac{1}{3}+2\pi k$, $x=\pi+2n\pi$, мында k, n – ар кандай бүтүн сандар.

Демек, теңдемелер, барабарсыздыктар жана алардын системаларын туура чыгаруу үчүн эквиваленттүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүүгө аракет кылуу керек же ар бир жүргүзүлгөн өзгөртүүнү, колдонулган формуланын колдонуу шарттарын көзөмөлдөп туруу керек.

Суроолор

1) Тең күчтүү теңдемелер деген эмне?
2) Тең күчтүү өзгөртүүлөрдүн мисалдарын келтиргиле.
3) Тең күчтүү барабарсыздыктар деген эмне?
4) Тең күчтүү теңдемелер системаларын кандайча түшүнөсүнөр?
5) «Теңдеме – натыйжа» деген эмне?
6) Кайсы учурда чет тамырлар пайда болот?
7) Тамырлардын жоголуп кетишине алып келүүчү өзгөртүүлөрдү атагыла.

Көнүгүүлөр

122. Теңдемелер тең күчтүүбү?

а) $f(x)=0$ жана $\sqrt{f(x)}=0$;

б) $\sqrt{f(x)}\,\sqrt{g(x)}=0$ жана $\sqrt{f(x)g(x)}=0$;

в) $f(x)=0$ жана $\sqrt[3]{f(x)}=0$;

г) $f(x)=0$ жана $f(x)\cdot 10^{f(x)}=0$.

123. Теңдемелер тең күчтүүбү?

а) $|x-3|=|1-x|$ жана $(x-3)^2=(1-x)^2$;

б) $3^{\log_3 x}=x^2$ жана $x^2=x$;

в) $\log_2 x(x+1)=1$ жана $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$;

г) $\log_{x^2}(x-4)^2=1$ жана $\log_x(x-4)=1$;

д) $\log_2 x^2=1$ жана $2\log_2 x=1$;

е) $\log_2 x^3=0$ жана $3\log_2 x=0$.

124. Эки теңдеменин кайсынысы башкасынын натыйжасы болот?

а) $\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+3}$ жана $(x-3)(x+3)=(x+1)(x-1)$;

б) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{2x+3}=3$ жана $\sqrt{2x^2-x-6}=3$.

125. Барабарсыздыктар тең күчтүүбү?

а) $x+\sqrt{x}>\sqrt{x}-2$ жана $x>-2$;

б) $x+\sqrt{1-x}>\sqrt{1-x}-3$ жана $x>-3$;

в) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}>1$ жана $x^2-1>x^2-x+1$;

г) $\sqrt{(x+2)^2(x-3)}>0$ жана $x-3>0$;

д) $\sqrt{(x+8)^2(x-2)}\geq 0$ жана $x-2\geq 0$;

е) $\sqrt{(x+2)^2}<\sqrt{x^2}$ жана $|x+2|<|x|$.

126. Теңдеменин тамыры туура табылганбы?:

а) $\sin x(2^{\ln x}-1)=0$, тамыры $x=k\pi,\ k\in Z$;

б) $(x-2)\cdot 3^{-x}=0$, тамыры $x=2$.

III бөлүмгө кошумча көнүгүүлөр

127. Теңдеменин чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x^6+x^4+1}<-1$;

б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\geq 2$;

в) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x-1}>0$;

г) $\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{x-4}<1$;

д) $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-5x}>\sqrt{3}$;

е) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}<(x-1)^2(x-5)$.

128. Теңдеменин чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $(x-5)^{\frac{1}{8}}+119=0$; г) $\sqrt{2-x}=\log_5(x-2)$;

б) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$; д) $|x-2|+|x^3-27|=0$;

в) $\sqrt{5-x}+\sqrt[4]{x-5}=1$; е) $\sin x=\sqrt{x^2+x+2}$.

129. Барабарсыздыктын чыгарылышы жок экенин далилдегиле:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt[10]{x-2}<0$; г) $\sqrt{8-x}+9\sqrt{x-8}+1>\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{x-9}+5\sqrt{9-x}>2$; д) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\geq 2$;

в) $|x-3|+\sqrt{x-4}+3\sqrt{4-x}<\frac{1}{2}$; е) $\cos x>\sqrt{x-1}+10\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.

130. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+1}=2x-4$;

б) $\sqrt{x+7}=4x-5$;

в) $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-10}+\sqrt{x-1}=3$;

г) $\sqrt[5]{x-2}=3$;

д) $\sqrt[3]{9-x^2}=2$;

е) $\sqrt[10]{x-6}+9\cdot\sqrt[10]{6-x}-\sqrt{x+10}+4=0$.

131. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=6$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$;

г) $\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}$;

д) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=4$;

е) $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

Көрсөтмө: г) оң жагынын, е) сол жагынын түйүндөшүнө көбөйткүлө; д) теңдеменин сол жагынын даражасы $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$.

132. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+7}\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}+\sqrt{9x+4}=\sqrt{8x+9}$;

в) $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^3-1}=0$;

г) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}=\dfrac{5}{6}$.

Көрсөтмө: а), б) даражага көтөрүү, в) көбөйтүүчүлөргө ажыратуу, г) жаңы белгисизди кийирүү методун колдонсоңор болот.

133. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$;

б) $\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x}=2\sqrt{4{,}5}$;

в) $\sqrt{76+6x-x^2}=x+4$;

г) $\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}$;

д) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$;

е) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$.

Көрсөтмө: а) эки жагын квадратка көтөрсөңөр болот.

134. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$;

б) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

в) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$;

г) $x+12\sqrt{x}-64=0$;

д) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$;

е) $11+2x=\sqrt{22-x}$.

Көрсөтмө: а) $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=y$ деп белгилегиле; в) жаңы белгисиздерди кийиргиле.

135. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}=2x$;

б) $\sqrt{19+\sqrt{2x+10\sqrt{5x^2+21x-73}}}=5$.

Көрсөтмө: а) суперпозиция методун пайдалангыла; б) татаал радикалдарды чыгаруу методун пайдалангыла.

136. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$;

б) $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}$;

в) $\sqrt{10x+32+\sqrt{x^4-14x^2+5x-1}}=x+5$;

г) $x^2-\sqrt{2x^2-8x+12}=4x+6$.

137. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|2x-3|=11$; *г)* $|x+2|+|x-3|=5$;

б) $\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=1$; *д)* $\frac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$;

в) $x^2+4|x-3|-7x+11=0$; *е)* $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

138. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}8x+11y=30,\\ 3x-4y=-5;\end{cases}$ *в)* $\begin{cases}x-2y+3z=6,\\ 2x+3y-4z=20,\\ 3x-2y-5z=6.\end{cases}$

б) $\begin{cases}5x-8y=1,\\ 9x+2y=5;\end{cases}$

139. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2{,}5\cdot\sqrt[6]{xy};\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}x^2+y^4=20,\\ x^4+y^2=20;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19,\\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}.\end{cases}$

Көрсөтмө: Жаңы белгисиздерди кийиргиле; *б)* $u=x^2$, $v=y^2$ деп, анан экинчи теңдемеден биринчисин мүчөлөп кемиткиле.

140. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x-3|<1$; *г)* $\sqrt{x-2}+|x-8|\le 6$;

б) $|2x-1|-|x-2|\ge 4$; *д)* $\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1$;

в) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\le 2$; *е)* $|x^2-4|-|9-x^2|\ge 5$.

141. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x<\sqrt{2-x}$;

б) $x+1>\sqrt{2+x}$;

в) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}<\sqrt{9x^2+12x+4}$;

г) $x>\sqrt{x}$;

д) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;

е) $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}<\sqrt{x+1}$.

Көрсөтмө: в) $\Leftrightarrow |x+1|+|x-1|<|3x+2|$.

142. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2-5x-6<0, \\ x^2-3x>0; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} (x-2)\sqrt{x^2-5{,}5x+6}\geq 0, \\ (x+1)\sqrt{x^2+0{,}5x-3}\leq 0. \end{cases}$

143. Төмөнкү теңдемелер тең күчтүүбү?:

а) $x^3-3=2x$ жана $x^3-3+\dfrac{1}{x+1}=2x+\dfrac{1}{x+1}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=2$ жана $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=2$;

в) $\lg\sin x=0$ жана $\sin x=1$.

144. Төмөнкү системалар тең күчтүүбү?

а) $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ xy=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \lg x+\lg y=\lg 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ xy=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \lg|x|+\lg|y|=\lg 2. \end{cases}$

Тест

145. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

1) $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$;

а) 1; *б)* 2; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 5.

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$.

а) 3; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 6; *д*) 7.

146. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\frac{3}{3+\sqrt{x}}-\frac{5}{3\sqrt{x}+x}=\frac{1}{4}.$$

а) 10; *б*) 12; *в*) 13; *г*) 14; *д*) 16.

147. Теңдеменин эң кичине бүтүн тамырын тапкыла:
$|x-3|+2|x+1|=4$.

а) −2; *б*) −1; *в*) 0; *г*) 1; *д*) 2.

148. Барабарсыздыктын эң кичине оң бүтүн чыгарылышын тапкыла:
$|2x-1|+|x-3|\leq 4$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

149. Барабарсыздыктын эң кичине натуралдык чыгарылышын тапкыла:

$$\sqrt[5]{x^5+x^2-4}>x.$$

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

9-класстын «Алгебрасынын» (Иманалиев М., Асанов А., Жусупов К., Искандаров С., 2002-жыл) аягындагы «Тарыхый маалыматтарда» теңдемелерди, теңдемелер системасын жана алардын барабарсыздыктарын чыгаруунун тарыхына тиешелүү бир топ материалдар бар экенин эскертели жана төмөндө кээ бир тарыхый маалыматтар менен аларды толуктайлы.

Эки белгисиздүү эки теңдемелүү системадан бир белгисизди экинчиси менен туюнтуп, б. а. бир теңдемеден таап, экинчисине коюунун жалпы методун француз математиги П. Ферма (1601–1665) иштеп чыккан. Ал эми теңдемелер системасын график методу менен чыгаруу француз математиги Р. Декарттын (1596–1650) аналитикалык геометриясына (координаттар системасы методуна) негизделген.

Көп белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасынын теориясын биринчи болуп системалык түрдө немис математиги жана философу Г. В. Лейбниц (1646–1716) караган. Щвейцария математиги Г. Крамер (1704–1752) сызыктуу теңдемелер системасынын белгисиздери менен теңдемелеринин саны барабар, ошондой эле анын бир гана чыгарылышы бар учурунда бул системанын чыгарылыштарын табуунун аныктагычтар эрежесин (методун) 1750-жылы сунуштаган. Ал эми көп белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун «үч бурчтук түрүнө келтирүү» методун немис математиги К. Ф. Гаусс (1777–1855) сунуштаган. Гаусстун методу идеясы боюнча П.Ферманын методуна жакын. Айырмасы эле П. Фермада системанын теңдемелери экөө, белгисиздери экөө, ошондой эле теңдемелери сызыктуу эмес болушу мүмкүн. Ал эми Гаусста белгисиздердин, теңдемелердин саны көп жана теңдемелери сызыктуу.

Кээ бир тарыхый маалыматтарга таянсак, анда байыркы Кытайда биздин эрага чейин эле Гаусстун методун элестетүүчү сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун жалпы эрежеси табылган жана ошондой эле бул эреже япон математиги Кова Секи (1642–1708) тарабынан 1683-жылы өркүндөтүлгөн деп айтылат.

XIX кылымдын экинчи жарымында сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы бар же жок экенинин жалпы шарты табылган (Кронекер – Капеллинин теоремасы). Бул теореманы бири биринен көз карандысыз немис математиги Леопольд Кронекер (1823–1891) жана италиялык математик Альфредо Капелли (1855–1910) далилдеген. Сызыктуу теңдемелер системасынын теориясы матрицалар (сандардын тик бурчтуу таблицасы) теориясынын өнүгүшүнө зор таасир берди. Азыркы учурда матрицалар теориясы математика, экономика жана башка илим менен техниканын ар түрдүү тармактарында кеңири колдонулуп жатат.

Сызыктуу барабарсыздыктар системасын терең изилдөө XX кылымдын экинчи жарымында башталган. Буга себепчи – сызыктуу программалоо теориясы (математиканын эң жаңы тармактарынын бири). Бул теориянын негизги идеялары XX кылымдын 30-жылдарынын аягында советтик метематик, академик Л. В. Канторович тарабынан сунушталган. Бул теориянын кийинки методдору америкалык математик Дж. Б. Данцигдин иштеринде табылган. Сызыктуу программалоонун теориясы (методдору) экономиканын, согуш иштеринин ж.б. ар түрдүү тармактарда кеңири колдонуу тапты жана колдонулууда. Математикалык методдорду ойлоп таап, негиздеп жана экономикада колдонгон иштери үчүн Л. В. Канторовичке 1965-жылы Лениндик сыйлык, ал эми Л. В. Канторовичке америкалык экономист Т. Ч. Купманс менен биргеликте 1975-жылы Нобель сыйлыгы ыйгарылган.

Эми жогорку даражадагы алгебралык теңдемелерди чыгарууда көп колдонулуучу Виет, Безунун теоремаларына жана Ньютондун биномуна байланышкан тарыхый маалыматтарга токтололу.

Виеттин теоремасы (Виеттин формулалары) – бул жогорку даражадагы

$$P_n(x)=0 \qquad (1)$$

теңдемесин, мында $P_n(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$, коэффициенттери менен анын тамырларын байланыштыруучу формулалар, б. а.

$$\begin{aligned} &a_1=-(x_1+x_2+...+x_n),\\ &a_2=+(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n), \qquad (2)\\ &a_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_n=(-1)^nx_1x_2...x_n, \end{aligned}$$

мында $x_1,x_2,...,x_n$ – (1) теңдемесинин тамырлары. Виеттин теоремасынын мазмуну ушундай. Бул теорема (формулалар) биринчи жолу француз математиги Франсуа Виет (1540–1603) тарабынан табылган. Виеттин теоремасын биз квадраттык теңдеме үчүн (n=2) 8-класстын «Алгебрасында» өткөнбүз. (1) теңдемесинин тамырларын n>4 болгондо табуу формулалары жалпы учурда жок болгондуктан анын тамырларын (1) теңдемесинин бош мүчөсүнүн (a_n) көбөйтүүчүлөрүнөн издөө керектиги бизге Виеттин (2) формулаларынан, б. а. $a_n=(-1)^nx_1x_2...x_n$ формуласынан көрүнүп турат. Муну (1) теңдемесин чыгаруу эрежеси катары пайдалансак болот.

Безунун теоремасынын мазмуну төмөнкүчө: $P_n(x)$ көп мүчөсүн (полиномун) $x-a$ (эки мүчөсүнө = биномуна) бөлгөндө $P_n(a)$ деген калдык алынат. Бул теореманы биринчи жолу далилдеп, жарыялаган француз математиги Этьенн Безу (1730–1783) болгон. Ошон үчүн теорема анын атын алып жүрөт. Бул теоремадан $P_n(a)$=0 болсо, анда $x=a$ саны (1) теңдемесинин тамыры деген натыйжа алынат. Демек, бул учурда $P_n(x)$ көп мүчөсү $x-a$ га калдыксыз бөлүнөт жана (1) теңдемесинин ордуна даражасы $n-1$ ге барабар жаны

$$Q_{n-1}(x)=0 \qquad (3)$$

теңдемесин алууга болот, мында $Q_{n-1}(x) \equiv \dfrac{P_n(x)}{x-a}$. Ал эми $x=a$ тамырын Виеттин теоремасын (формулаларын) пайдаланып табууга болорун биз жогоруда айтып өттүк.

Ньютондун биному – бул $(a+b)^m$, б.а. $a+b$ биномунун оң бүтүн m даражасын ачуунун формуласы. Биз бул формуланын $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ учурларын кыскача көбөйтүүнүн формулаларынан 7-класстын «Алгебрасында» өткөнбүз. Ньютондун биномун ачып жазганда a^m, b^m дин коэффициенттери бирге барабар, ал эми башка a менен b нын ар түрдүү даражадагы көбөйтүндүлөрүнүн коэффициенттерин (биномдук коэффициенттерди) табуу үчүн «Паскалдын үч бурчтугун» колдонууга болору белгилүү. Француз математиги жана физиги Блез Паскаль (1623–1662) өзүнүн бул «үч бурчтугун» 1665-жылы жарыяланган «Трактат об арифметическом треугольнике» деген эмгегинде жазып чыккан. Ал эми айрым бир тарыхый маалыматтарга таянсак, анда бул үч бурчтук жөнүндө Орто Азия математиги Омар Хайям (1048–1131) билген жана Ньютондун биномун ачкан деп эсептеп жүрүшөт. Ошондой эле биномиалдык коэффициенттердин аныкталышынын законченемдүүлүгүн, б.а. «Паскалдын үч бурчтугун» кытай математиктери 13-кылымдын аягында эле билишкен. Ал эми Орто Азия математиги Гаясаддин аль-Каши 1427-жылкы чыгармасында Ньютондун биномун $m\in N$ учурунда жарыялаган. Ошондой эле Ньютондун биномунун оң бүтүн даража үчүн так далилдөөсүн швейцария математиги Я. Бернулли (1654–1705) бирикмелер аркылуу жүргүзгөн; Швейцариянын дагы бир математиги Л. Эйлер (1707–1783) бөлчөк даража үчүн Ньютондун биномунун формуласын далилдеген. Ал эми И. Ньютон 1676-жылы бөлчөк жана терс даражалар үчүн Ньютондун биномунун формуласын табууга мүмкүнчүлүк бар экенин айткан экен. Ньютондун биномунун формуласы алгебрада, математикалык анализде, сандар теориясында, ыктымалдуулук теориясында, математикалык статистикада ж. б. илимдин тармактарында кеңири колдонулуп жүрөт.

Айрым бир математикалык символдор менен терминдерге да токтотолу.

1) $\cap, \cup$ (көптүктөрдүн кесилиш, биригүү) белгилерин 1888-жылы француз математиги Дж. Пеано (1858–1932) кийирген.

2) $\subset$ (көптүктөрдүн тиешелүү, камтылуу, жатат) белгиси 1890-жылы немис математиги Э. Шредер (1841–1866) тарабынан сунушталган.

3) $\in$ (тиешелүү) белгисин Дж. Пеано 1895-жылы,

4) $\equiv$ (теңдеш барабар) белгисин 1857-жылы немис математиги Б. Риман (1826–1866) кийирген.

5) $\approx$ (болжолдуу барабар) белгисин немис математиги А. Гюнтер (1848–1923) 1882-жылы сунуштаган.

6) lim (предел) белгисин швейцариялык математик С. Люилье

1786-жылы, $\lim\limits_{n\to\infty}$ белгисин XX кылымдын башында көптөгөн математиктир колдонушкан.

7) Δx (айырма, өсүндү) белгисин 1755-жылы Л. Эйлер (1707–1783),

8) $\dfrac{d}{dx}$ (туунду) белгисин немис математиги Г. Лейбниц (1646–1716) 1675-жылы,

9) dy, $df(x)$ (дифференциал) белгисин Г. Лейбниц 1675-жылы.

10) $f'(x)$, y' (туунду) белгисин француз математиги Ж. Лагранж (1736–1813) 1770-жылы,

11) $\int ydx$ (аныкталган эмес интеграл) белгисин Г. Лейбниц 1675-жылы.

12) $\int\limits_a^b f(x)dx$ (анык интеграл) белгисин француз математиги Ж. Фурье (1768–1830) 1819-жылы,

13) Log (логарифм белгисин) немис математиги И. Кеплер (1571–1630) 1624-жылы,

14) log (логарифм) белгисин италиялык математик Б. Кавальери 1632-жылы,

15) ln (натуралдык логарифм) белгисин немис математиги А. Прингсхейм (1850–1941) 1893-жылы,

16) e (натуралдык логарифмдердин негизи) санын Л. Эйлер 1736-жылы,

17) arcsin (арксинус) белгисин Ж. Лагранж 1772-жылы кийирген.

18) Аныктагычты белгилөө үчүн эки вертикалдык таякчаны колдонуу англиялык математик А. Кэли (1821–1895) тарабынан 1841-жылы сунуш этилген.

19) «Функция» терминин биринчи жолу Г. Лейбниц 1694-жылы колдонгон, ал эми XVIII кылымда бул терминди швейцариялык математик И. Бернулли (1744–1807) кенири колдонууга сунуштаган.

20) Математикалык символ катары ( ) кашаасы XVI кылымда немис математиги М. Штифель жана италиялык математик Н. Тарталья, [ ] (квадрат кашаа) италиялык математик Р. Бомбелли XVI кылымдагы эмгектеринде, ал эми { } фигуралык кашааны франциялык математик Ф. Виет (1540–1603) XVI кылымдын аягында колдоно баштаган.

21) «Коэффициент» терминин Ф.Виет кийирген, бирок азыркыдай маанисинде англиялык математиктер В. Оутред (1574–1660) менен Дж. Валлис (1616–1703) XVII кылымда колдонушкан.

22) «Матрица» терминин англиялык математик Д. Сильвестр (1814–1897) 1851-жылы кийирген.

23) Геометриялык прогрессиянын биринчи «эн» мүчөсүнүн суммасын табуу эрежесин биринчи жолу француз математиги Н. Шюке (15 к.) 1484-жылы тапкан.

Акыл-эси төмөн болгон адамдардын таасиринен инсандын акыл-эси төмөндөйт, деңгээли өзүнүкүндөй болгон адамдын таасиринен акыл-эс өзгөрбөйт, ал эми акыл-эси жогору болгон инсан менен байланышуудан акыл-эси жогорулайт.
(Байыркы «Хитападеша» китебинен)

IV бөлүм

Көнүгүүлөр

Төмөндө берилген f функциянын F баштапкы функциясын тапкыла (1–3):

1. *а)* $f(x)=\frac{4}{5}x+10;$ *в)* $f(x)=-4x^5\ \frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}+1;$

б) $f(x)=9x^2+11x+7;$

г) $f(x)=6\cos\frac{x}{3}+e^{4x}+7^{2x};$

д) $f(x)=4\sin\frac{x}{4}+\frac{4}{\cos^2 5x}-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}+\frac{6}{1+7x^2}.$

2. *а)* $f(x)=4e^{-2x}+\frac{4}{\sin^2 4x}+\frac{1}{2x};$ *в)* $f(x)=4x^{-3x}+\frac{5}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}};$

б) $f(x)=\frac{4}{3x\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x};$ *г)* $f(x)=3\sin 7x-4\cos 7x+\mathrm{tg}x.$

3. *а)* $f(x)=\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}}+3\cos 9x+4\sin 2x+1;$

б) $f(x)=\frac{3}{4+12x^2}+\frac{7}{e^{3x}}+\mathrm{ctg}2x;$

в) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{6-3x^2}}+4\cos\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{4};$

г) $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x-2}.$

Төмөндө берилген f функцияларынын F баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла (4 – 6):

4. *а)* $f(x)=\frac{4}{\sin^2 2x}+4x\sqrt{x}+\frac{1}{x};$ *б)* $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x^3}+e^{2x};$

в) $f(x)=4\sqrt{x+10}+5\sqrt{5x+10}$;   *г*) $f(x)=3\cos(4x+2)+5\sin(3x-1)$.

5. *а*) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+10}}+(x+2)\sqrt{x+2}$;

б) $f(x)=\dfrac{7}{3x+4}+(3x+4)^{10}$;

в) $f(x)=e^{5x+4}-9^{2x+1}+7^{-3x+4}$;

г) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2x+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

6. *а*) $f(x)=\dfrac{5}{4\cos^2(4x+1)}-\dfrac{6}{3\sin^2(2x+5)}$;   *в*) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}+\dfrac{x^3}{x+1}$;

б) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4x+7}-\dfrac{1}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$;   *г*) $f(x)=\dfrac{3\cos 4x}{\sin 2x-\cos 2x}$.

Төмөндө берилген f функциянын F баштапкы функциясы үчүн графиги М чекити аркылуу өткөн F баштапкы функциясын тапкыла (7– 9):

7. *а*) $f(x)=4x^2-2x+1$, $M(1;3)$;   *б*) $f(x)=4\sin 4x+\cos 2x$, $M(\frac{\pi}{4};1)$.

8. *а*) $f(x)=\dfrac{3}{x}+4$, $M(e;7)$;   *б*) $f(x)=3e^{-x}+4e^{x}$, $M(0;4)$.

9. *а*) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, $M(1;2)$;   *б*) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$, $M(4;6)$.

Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла (10 – 12):

10. *а*) $\int(4x^3-6x^2+2x+1)dx$;   *б*) $\int(\sqrt[4]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}})dx$;

в) $\int\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)dx$;   *д*) $\int(e^{-3x}+\sin\dfrac{1}{2}-x)dx$;

г) $\int(\cos 3x-4\sin 2x)dx$;   *е*) $\int(3^{2x}-2\cos\dfrac{1}{3}x)dx$.

11. *а*) $\int(\sqrt{3x}-\dfrac{5}{x}+6\cdot 3^{-x})\,dx$;   *г*) $\int\left[\dfrac{9}{\sqrt[3]{6x-2}}+\sin(3x+1)\right]dx$;

б) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\cos(x+10)\right)dx$;   *д*) $\int\left(\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\dfrac{4}{5-2x}\right)dx$;

в) $\int\dfrac{2}{\sqrt{x+9}}\,dx$;   *е*) $\int(4+2x)(3-x)dx$.

12. а) $\int (4x+x^2)\sqrt[4]{x}\,dx;$ г) $\int \sin 4x \cos 4x dx;$

б) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx;$ д) $\int (\sin 8x \sin x + \cos 8x \cos x)dx.$

в) $\int \frac{x^2-4x}{x-2}\,dx;$

Төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле (13 – 16):

13. а) $\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+4\right)dx;$ г) $\int_0^{\pi} (4\cos 4x - 3\sin 2x)dx;$

б) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)dx;$ д) $\int_{-1}^{2} (x^2-4x+2)dx;$

в) $\int_{-1}^{1} (x^2-4x+5)dx;$ е) $\int_0^2 e^{4x}\,dx.$

14. а) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}(1+\frac{4}{x+1})dx;$ г) $\int_0^{\pi} (\cos^2 x - 2\sin^2 x)dx;$

б) $\int_1^2 \frac{6x+4}{\sqrt{x}}\,dx;$ д) $\int_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x)dx;$

в) $\int_1^6 \frac{3}{\sqrt{x+3}}\,dx;$ е) $\int_0^1 (7^{3x}+7^{-3x})\,dx.$

15. а) $\int_0^1 \frac{x^2+3x+2}{x+1}\,dx;$ б) $\int_1^1 \left(\frac{3}{1+4x^2}-4\right)dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\frac{\pi}{3})dx;$ д) $\int_0^2 (9x+1)^4\,dx;$

г) $\int_0^1 \frac{dx}{4x+1};$ е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x+\frac{\pi}{4})dx.$

16. *а)* $\int_1^2 (x-\frac{1}{x})^2\,dx$; *в)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\cos^2 2x\,dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x \sin 2x)\,dx$. *г)* $\int_1^2 (7x-4)^5\,dx$

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (17– 25):

17. $y=2-x^2$ параболасы жана $y=-x$ түз сызыгы.

18. $y=x^2$ параболасы жана $y=x+2$ түз сызыгы.

19. $y=2-x^2$ параболасы жана $y=-2$ түз сызыгы.

20. $y=x^2$ жана $y=-x^2+4x$ параболалары.

21. $y=x^2-2x$ параболасы жана $y=x$ түз сызыгы.

22. $y=7-2x^2$ жана $y=x^2+4$ параболалары.

23. $x=2y^2$ параболасы, $x=0$ жана $y=3$ түз сызыгы.

24. $x=y^2$ параболасы, $x=y+2$ түз сызыгы.

25. $x=-y^2$ жана $x=2-3y^2$ параболалары.

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигураны Ox огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла (26 – 33).

26. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$; 2) $x=\frac{2}{y}$, $1\le y\le 4$.

27. 1) $y=x^2+1$, $y=-x+3$; 2) $y=x^2$; $y=0$, $x=2$.

28. 1) $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=0$; 2) $y=x-x^2$, $y=0$.

29. 1) $y=\sqrt{\cos x}$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $x=0$; 2) $y=x^3$; $y=0$, $x=2$.

30. 1) $y=\sqrt{4-x}$, $x=0$, $y=0$; 2) $x=1-y^2$, $x=0$.

31. 1) $y=x$, $y=1$, $x=0$; 2) $y=2x$, $y=x$, $x=1$.

32. 1) $x=\sqrt{y}$, $y=4$, $x=0$; 2) $y=x^2+3$, $y=4$.

33. 1) $y=x^2+1$, $y=x+3$; 2) $y=4-x^2$, $y=2-x$.

34. 1) $y=x-1$, $y=1$, $x=1$; 2) $y=x$, $y=\sqrt{x}$.

35. Эгерде ар кандай $x \in [0;\ 7]$ үчүн $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$ болсо, анда $f(4)$ тү тапкыла.

36. Эгерде ар кандай $x \in [0;\ 9]$ үчүн $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos\pi x$ болсо, анда $f(4)$, $f(7)$ жана $f(9)$ ду тапкыла.

37. Функциялардын кайсынысы өсүүчү жана кайсынысы кемүүчү?

а) $y = \frac{x^2}{2}$; *б)* $y = x^4$; *в)* $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

38. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $64 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}}$; *б)* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

39. *а)* $y = e^{-x}\cos x$; *б)* $y = 5^{x+1}$; *в)* $y = e^x + 2x$ функциясынын туундусун тапкыла.

40. Эсептеп чыккыла:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$; *б)* $\log_{\sqrt{2}} 4$; *в)* $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{125}$.

41. $\log_2 N = \log_2 \log_2 \log_2 5 - \log_2 \log_2 10$, $N = ?$

42. $\log_3 N = \log_9 a - \log_{27} b + \log_{\frac{1}{3}} c$, $N = ?$

43. Эсептегиле: а) $\frac{\log_3 5}{6^{1+\log_3 2}}$; *б)* $\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.

44. Кайсынысы чоң?

а) $\log_6 2$ же $\log_5 2$; *в)* $\log_3 2$ же $\frac{2}{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{7}} 3$ же $\log_{\frac{1}{8}} 3$; *г)* $\log_2 7$ же $\log_3 2$?

Теңдемелерди чыгаргыла (45–63):

45. $7^x = 7^{2-x}$.

46. $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$.

47. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 10^4$.

48. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) = -2$.

49. $\log_x 3 = 2$.

50. $\log_x 5 = 0$.

51. $\log_{6-x} x = 2$.

52. $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$.

53. $4^{x+1} - 3^x = 3^{x+2} - 4x$.

54. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x + 5^{x+1}$.

55. $18 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 36 \cdot 4^{x+1} - 3^{2x+3}$.

56. $4^x \cdot 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

57. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

58. $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$.

59. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

60. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

61. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$.

62. $x^{\lg x} = 10000$.

63. $x^{\log_3 x - 3} = \dfrac{1}{9}$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (64–71):

64. $\dfrac{2^2 + 2^{-x}}{2^2 - 2^{-x}} \le \dfrac{5}{3}$.

65. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^x} \ge \dfrac{1}{4}$.

66. $4^x + 2^x < 20$.

67. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$.

68. $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 x + \log_9 x \le -1$.

69. $x^{\log_2 x} > 4\log_2 x$.

70. $\log_5 x^2 + (\log_5 x)^2 \ge 1 + \log_5 7$.

71. $\log_3 x - \log_x 3 \le \dfrac{2}{3}$.

72. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^y = 16, \\ y + \log_2 x = 5. \end{cases}$

73. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x+5} = 0$; *в)* $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-7} = 2$;

б) $\sqrt{2x+5} + \sqrt[4]{x+2} = 0$; *г)* $\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{x+3} = 2$;

д) $\sin x = \sqrt{x^2+x+1}$; *е)* $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x-5} = -x^2 - 4$.

Көрсөтмө: в), *г*) СЖнын түйүндөшүнө көбөйткүлө.

74. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2-5x+4} + \sqrt{x^3-1} = 0$; *г)* $\sqrt[3]{5+\sqrt{x^2+5}} = 2$;

б) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}} = \dfrac{5}{6}$; *д)* $\sqrt[7]{125+\sqrt[3]{1+\sqrt{x-99}}} = 2$;

в) $\sqrt[5]{x^2-3x} + \sqrt[5]{3x-x^2+2} = 2$; *е)* $x + x^{\frac{1}{2}} = 6$.

75. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2 - 3x + 5\sqrt{x^2-3x+76} = 260$; *г)* $\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x+1} = 0$;

б) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$; *д)* $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 1$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$; *е)* $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$.

76. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$; *г)* $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$;

б) $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$; *д)* $\sqrt[3]{x+8} + \sqrt{2x+9} = 5$;

в) $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$; *е)* $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$.

77. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x-\sqrt{x^2-1})^3(x+\sqrt{x^2-1})^5 = 1$; *г)* $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2} = 1$; *д)* $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$;

в) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$; *е)* $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$.

78. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{a+x} - \sqrt[3]{a+x} = 0$ (a − параметр);

б) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$ (a – параметр);

в) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=20$;

г) $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6\,(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$;

д) $\sqrt[8]{x^3+x^2-x}-\sqrt[8]{x^3+x^2-1}=0$;

е) $\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=0$.

79. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

б) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

в) $\sqrt{10+x+6\sqrt{1+x}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$;

г) $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

Көрсөтмө: б) $x>0$ болгондуктан, теңдеменин эки жагын $\sqrt[4]{x}$ ке бөлсө болот.

80. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}<2$; б) $\dfrac{1}{x^2-2x+3}>1+\sqrt{x^2-2x+3}$;

в) $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$; д) $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}<2$;

г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x+5}<2{,}2$; е) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}<(x-1)^4\,(x-5)$.

81. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-12}\geq 0$; г) $\sqrt{x^2-7}>-1$;

б) $\sqrt[4]{1-x^6}\leq 0$; д) $\sqrt{1-x}<x$;

в) $\sqrt{1+x}<7$; е) $\sqrt{1+x}>x$.

82. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x^2+2x-3}<1$; г) $\sqrt{(x-6)(1-x)}<3+2x$;

б) $\sqrt{3x^2+2x-1}>2$; д) $\sqrt{x-10}+\sqrt{10-x}+\sqrt[5]{x}>1$;

в) $\sqrt{x^2-x-12}>x-1$; *е)* $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

83. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geq\sqrt{x-5}$; *г)* $\sqrt{x^2-5x+4}>x-2$;

б) $\sqrt{x^2-x-12}<x$; *д)* $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<2$;

в) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; *е)* $\sqrt{x^2-3x+2}>3+x$.

84. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$; *г)* $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$; *д)* $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\geq x-1$;

в) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; *е)* $\sqrt[3]{x+2}\leq -5$.

85. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{x-5}<3$; *г)* $3\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geq 2$;

б) $(x-12)\sqrt{x-3}\leq 0$; *д)* $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leq 6$;

в) $\sqrt{x}-9\cdot\sqrt[4]{x}+18\geq 0$; *е)* $2x-5\sqrt{x}+2\leq 0$.

86. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|2x-5|=9$; *г)* $|2x+5|=|x|+2$;

б) $|x-2|+|2x-7|=3$; *д)* $\dfrac{2x^2-6}{|x|-1}=|x|+3$;

в) $2|x|-|x+1|=2$; *е)* $|x|-|x-1|=1$.

87. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x|(x^2-2x-3)\geq 0$; *г)* $\dfrac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}>0$;

б) $|x-1|+|2-x|>3$; *д)* $\dfrac{1}{|x|}(x^4-6x^2-16)\leq 0$;

в) $|x|+|2x+1|-x>1;$ *е*) $x^2+6|x|-7\geq 0.$

88. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 3x-5y=7, \\ 4x+y=1; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=5, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+4y=18, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ *г*) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

89. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18, \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2. \end{cases}$

Көрсөтмө: *а*), *б*) жаңы белгисиздерди кийирүү методун колдонсо болот.

90. Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x^2-10x+5<0, \\ x^2+3x-2<0; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^3+8}\leq 0, \\ x^3-1>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|\geq 1, \\ |x-1|<3; \end{cases}$ *г*) $\begin{cases} \sqrt{24-10x+x^2}>x-4, \\ \sqrt{2x+3}\leq x. \end{cases}$

Тест

91. Теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=4+\sqrt{34}.$$

а) −2; *б*) −1; *в*) 0; *г*) 1; *д*) 2.

92. Теңдеменин тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла:

$$(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$$

а) −12; *б*) −9; *в*) −8; *г*) −4; *д*) −2.

93. Теңдеменин тамырларын тапкыла:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

а) 2; *б)* 3; *в)* 4; *г)* {2; 5}; *д)* [2; 5].

94. Теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла:

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7.$$

а) –1; *б)* 0; *в)* 2; *г)* 4; *д)* 5.

95. Теңдеменин тамырларын тапкыла:

$$\sqrt{x+9}+\frac{1}{\sqrt{x+9}}=\frac{3}{2}.$$

а) –3; *б)* 2; *в)* $\varnothing$; *г)* 10; *д)* 12.

96. Теңдеменин эң кичине тамырын тапкыла:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}.$$

а) $\frac{1}{3}$; *б)* $\frac{1}{2}$; *в)* 0 ; *г)* 2; *д)* 3.

97. Теңдеменин тамырын тапкыла:

$$\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=\sqrt{2}.$$

а) 1; *б)* $\sqrt{2}$; *в)* $2\sqrt{2}$; *г)* $2\sqrt{3}$; *д)* $3\sqrt{3}$.

98. Теңдеменин тамырын тапкыла:

$$\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x.$$

а) $\sqrt{2}$; *б)* $\sqrt[3]{9}$; *в)* $\sqrt[3]{10}$; *г)* 4; *д)* 5.

99. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\sqrt{24-5x}>-x$.

а) –3; *б)* –2; *в)* 0; *г)* 3; *д)* 4.

100. Барабарсыздыкты канааттандырган эң кичине оң x санын тапкыла: $\sqrt{3x-6}<3$.

а) 1; *б)* $\frac{3}{2}$; *в)* $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; *г)* 2; *д)* $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

101. Барабарсыздыкты канааттандырган интервалдын тең ортосун тапкыла: $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}>\sqrt{2}$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

102. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла:

$$x^2+25\ge 8\sqrt{5-x}+10x.$$

а) −1; *б*) 0; *в*) 2; *г*) 4; *д*) 5.

103. Барабарсыздыктын эң кичине оң бүтүн чыгарылышын тапкыла: $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}\le 2.$

а) 2; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 8; *д*) 10.

104. Теңдеме үч тамырга ээ боло турган m параметринин маанисин тапкыла: $|x^2-6x|=m$.

а) 1; *б*) 3; *в*) 9; *г*) 10; *д*) 11.

Көрсөтмө: График методун пайдаланса да болот; параболасы менен түз сызыгынын кесилиш чекиттеринин абсциссаларынын саны үчөө боло турган аныктоо талап кылынат.

105. Барабарсыздыктын эң кичине бүтүн оң чыгарылышын тапкыла: $|2x-1|+|x-3|\le 4$.

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4; *д*) 5.

106. Теңдемелер системасын чыгаргыла жана $x+y$ ти тапкыла, $(x;\,y)$ – чыгарылыш: $\begin{cases}2x+3y=165,\\5x+2y=330.\end{cases}$

а) 60; *б*) 70; *в*) 75; *г*) 80; *д*) 85.

107. Теңдемелердин системасын чыгарып, $x+y+z$ жана xyz ти тапкыла, мында $(x;\,y;\,z)$ – чыгарылыш: $\begin{cases}4x+5y-2z=1,\\2x+7y-3z=-2,\\3x+y+2z=0.\end{cases}$

а) 1 *жана* 1; *б*) −1 *жана* 1; *в*) 1 *жана* −1;
г) −1 *жана* −1; *д*) 1 *жана* 2.

108. Теңдемелер системасынын бүтүн чыгарылышын тапкыла:

$$\begin{cases}x^2+6x+5<0,\\x^2+4x+3>0.\end{cases}$$

а) −4; *б*) −3; *в*) −2; *г*) −1; *д*) 0.

Математикалык моделдештирүүнүн табият таанууда, техникада жана коомдук илимдерде колдонулушуна мисалдар

Техниканын, табият таануунун жана коомдук илимдердин маселелерин изилдөөдөгү азыркы учурдагы эң негизги методдордун бири бул математикалык моделдештирүү методу болуп саналат. Төмөндө математикалык моделдештирүүнүн илимдин ар түрдүү тармактарындагы колдонулуштарына мисалдар келтирилген:

1-м и с а л. **Механикалык кыймылдын теңдемеси.**

Массасы m ге барабар болгон материалдык чекиттин F күчүнүн таасири менен Ox огу боюнча кыймылын карайлы. Мында t убакыт, $v(t)$ менен $a(t)$ – убакыттын t моментиндеги чекиттин ылдамдыгы менен ылдамдануусу болсун дейли. Ньютондун экинчи закону боюнча $ma=F$ болот. Бирок, $a=\frac{d^2x}{dt}=x''$ экендигин эске алсак, анда *механиканын кыймылынын теңдемеси* деп аталган төмөнкү $m\,x''=F$ теңдемесин б. а. математикалык моделин алабыз. Мында $x=x(t)$ белгисиз функциясы убакыттын t моментиндеги материалдык чекиттин абалын билдирет. Мында төмөнкү учурлар болушу мүмкүн.

1. Күч турактуу б. а. $F=const$. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=\frac{F}{m}=a$ болот. Мында a – турактуу сан.

2. Күч убакытка карата мезгилдүү функция б. а. $F=F_0\sin\omega t$, F_0 – турактуу. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=\frac{F_0}{m}\sin\omega t$ болот.

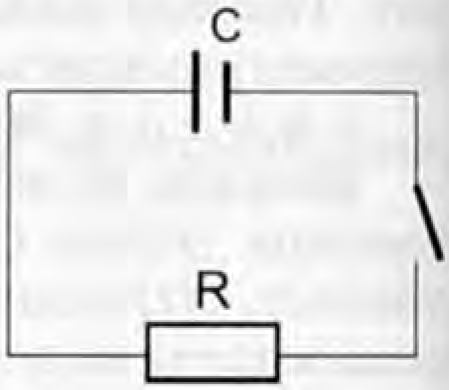
3. Идеалдуу серпилгичтүү пружина үчүн $F=-kx$, мында $0<k$ – серпилгичтүүлүк коэффициенти, „–“ белгиси күчтүн багыты жылышуунун багытына карама каршы багытталгандыгын билдирет. Бул учурда кыймылдын теңдемеси $x''=-\frac{k}{m}x$ болот.

4. Чекиттин эркин радиалдык космостук учуусунда $F=-\frac{km}{x^2}$ болот. Бул учурда $x''=-\frac{k}{x^2}$.

2- м и с а л. ***Радиоактивдүү ажыралыш.*** Эгерде $m(t)$ аркылуу убакыттын t моментиндеги радиоактивдүү заттын массасын белгилесек, анда радиоактивдүү ажыралуу төмөндөгүдөй физикалык законго баш иет: Ажыралыштын ылдамдыгы терс (себеби убакыт өткөн сайын масса азаят) жана ал ылдамдык убакыттын t моментиндеги заттын массасына пропорциялаш. Мында, пропорциялаш коэффициенти k белгилүү жана $k<0$. Бул законду математикалык тил менен жазсак, анда $\frac{dm(t)}{dt}=km(t)$,

$k<0$ теңдемесин б. а. математикалык моделин алабыз. Бул теңдеменин $m(t_0)=m_0$ шартын канааттандырган чыгарылышы $m(t)=m_0 e^{k(t-t_0)}$ болот. Мында t_0 менен m_0 – белгилүү.

3-м и с а л. ***Электр чынжыры.*** Каршылык жана конденсатор удаалаш туташтырылган (сүрөтү төмөндө берилген) электр чынжырын карайлы. Электр чынжырында кыска туюктануу болуп өтүп, баштапкы зарядга ээ болгон конденсатор разряддала баштайт деп эсептейбиз.



Убакыттын t моментиндеги конденсатордун чыңалуусу $U(t)$ менен белгилейли. Бул учурда $q(t)$ заряды $U(t)$ чыңалуу менен $q=CU$ формуласы менен байланышкан. Мында С – конденсатордун сыйымдуулугу. Каршылык аркылуу $I=\frac{-U}{R}$ тогу өтөт, мында « – » белгиси токтун багыты менен байланышкан, R – каршылыктын чоңдугу (Омдун закону). Бул учурда $I=\frac{dq}{dt}$ болгондугун эске алсак, анда $C\cdot\frac{dU}{dt}=-\frac{U}{R}$ же $\frac{dU}{dt}=-\frac{1}{RC}U$ теңдемесин б. а. электр чынжырынын математикалык моделин алабыз.

4-м и с а л. ***Калктын өсүүсү.*** Статистикалык маалымат боюнча, каралып жаткан региондо убакыттын бирдигиндеги жаңы туулгандардын саны менен өлгөндөрдүн саны калктын жалпы санына пропорциялаш болот. Ал пропорция коэффициенттерин k_1 жана k_2 менен белгилейли. Убакытка карата калктын өзгөрүү законун табуу керек болсун. Ал үчүн убакыттын t моментиндеги региондогу калктын санын $y(t)$ менен белгилейли. Анда Δt убакыт аралыгындагы калктын өсүүсү Δy, ал убакыт аралыгындагы жаңы туулгандардын саны менен өлгөндөрдүн санынын айырмасына барабар б. а. $\Delta y= =k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$ болот. Мындан $\frac{\Delta y}{\Delta t}=(k_1-k_2)y$. Акыркы формуладан $\Delta t\to 0$ пределине өтүп $y'=(k_1-k_2)y$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин $y(t_0)=y_0$ шартын канааттандырган чыгарылышы $y(t)=y_0 e^{(k_1-k_2)\cdot(t-t_0)}$ болот. Мында t_0 менен y_0 белгилүү. Акыркы формула аркылуу калктын санынын өзгөрүү закону аныкталат.

ЖООПТОР

I бөлүм

8. *г)* $x+2\mathrm{tg}x+C$; **9.** *а)* $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$; *г)* $2\sqrt{x}-\mathrm{ctg}x+C$. **10.** *в)* $\frac{-2}{3\sqrt{x^3}}+2\mathrm{arctg}x+C$; **11.** *в)* $7x+C$; *г)* $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$. **12.** *в)* $-7\cos\frac{s}{7}+C$; *г)* $\frac{1}{9}\sin 9y+C$. **13.** *б)* $3\mathrm{arctg}v-\frac{v^2}{2}+C$; *г)* $2\sqrt{\theta}-\cos\theta+C$. **14.** *а)* $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$; *г)* $F(x)=\sin x+4$. **15.** *б)* $4x-\frac{x^4}{4}+3$; *г)* $-\frac{3}{x}+10$. **16.** *г)* $x(t)==t+1-\pi-\sin t$, $v(t)=1-\cos t$. **17.** *а)* $F(x)=3x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{x}+C$; *б)* $F(x)=x^2-\frac{1}{x^3}-7\cos x+C$; *в)* $\frac{1}{85}(5t-4)^{17}+C$; *г)* $3\,\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{3}-s)+C$; *д)* $-\frac{3}{5}\frac{1}{y^5}-\mathrm{tg}(4y-3)+C$; *е)* $\frac{7}{10}\arcsin(10x-3)+C$. **18.** *а)* $\frac{3}{4}x^4-2x^2+9\ln(x)+C$; *б)* $\frac{9}{5}x^5-2x^{-2}+C$; *в)* $\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5x+C$; *г)* $3\,\mathrm{tg}x+4\arcsin x+C$; *д)* $\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+C$; *е)* $\frac{25}{4}\sqrt[5]{x^4}+C$. **19.** *а)* $-\frac{1}{4}\cos(4x+5)+C$; *б)* $\frac{1}{26}(2x-4)^{13}+C$; *в)* $\frac{1}{3}\sin x(3t-1)+C$; *г)* $2\,\mathrm{tg}x(2x+1)+C$. **20.** *а)* $5x+\frac{1}{4}\cos 4x-6\sin(\frac{\pi}{4}-x)+C$; *б)* $\frac{2}{3}\mathrm{tg}3x-2\sqrt{3-x}-x^4+C$; *в)* $-\frac{4}{5}\mathrm{ctg}(5x-1)-7\sin(6-x)+4{,}5x^2+C$. **21.** *а)* $F(x)=3{,}5x^2+9x+1$; *б)* $F(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}$; *в)* $F(x)=\frac{x^2}{2}+4x-6$. **22.** *а)* $x(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-2t+7$; *б)* $x(t)=8\sin\frac{t}{2}+5$; *в)* $x(t)=4-3\cos t$. **23.** *а)* $x(t)=\frac{1}{2}t^4+t^2+t+1{,}5$; *б)* $x(t)=\frac{4}{3}t^3+4{,}5t^2+3t+6$. **24.** *а)* $F_1-F_2=-4$; *б)* $F_1-F_2=2$; *в)* $F_1-F_2=-3$; *г)* $F_1-F_2=-1$. **25.** *а)* $x(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t-\frac{35}{6}$; *б)* $x(t)=-3\sin t-t+\pi+3$; *в)* $x(t)=-4\cos t+6$; *г)* $x(t)=\frac{t^3}{3}+t^2+t-\frac{5}{3}$. **35.** *а)* $\frac{1}{6}$; *б)* 1; *в)* 1; *г)* $\frac{15}{4}$. **36.** *а)* 3; *б)* 21; *в)* $\frac{21}{2}$; *г)* $-\frac{1}{4}$. **37.** *а)* -6; *б)* $\frac{4}{3}$; *в)* $-\frac{2}{3}$; *г)* 1. **38.** *а)* $-\frac{38}{3}$; *б)* $\frac{5}{14}$; *в)* $\frac{31}{480}$; *г)* $\frac{14}{3}$. **39.** *а)* $\frac{3}{5}$;

б) $2\sqrt{2}$; *в)* $\frac{45}{32}$; *г)* $\frac{783}{7}+\frac{5}{6}(\sqrt{2}-1)$. **40.** *а)* $\frac{1}{5}$; *б)* $\frac{1}{2}$; *в)* $\frac{1}{2}$; *г)* $\frac{\pi+2}{2}$. **41.** *а)* 1; *б)* $2-\frac{\pi^2}{2}$; *в)* $1-\frac{\pi}{4}$. **42.** *а)* 1; *б)* ln 4; *в)* 0; *г)* $-\frac{1}{4}$. **43.** *а)* 4; *б)* $\frac{\pi}{4}$; *в)* $\frac{2}{3}$; *г)* 4. **44.** *а)* $\frac{45}{4}$; *б)* $\frac{2}{3}$; *в)* 2; *г)* 6. **45.** *а)* 2; *б)* $\frac{1}{15}$; *в)* $\frac{1}{2}$; *г)* $\frac{13}{3}$. **47.** *а)* $y'=\frac{5}{4}x^4+6x$; *б)* $y'=\cos x-\cos 2x$. **48.** *а)* $F'(x)=\dfrac{\frac{x^2}{2}+x+1}{(x+1)^2}$; *б)* $F'(x)=0$. **49.** *а)* $F'(t)=\dfrac{6\sqrt{8+t}-t-16}{t^2\sqrt{8+t}}$; *б)* $F'(t)=(3t+2)e^{3t}$. **50.** S=10. **51.** s=$\frac{17}{4}$ *кв.бир.* **52.** $S=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$. **53.** $S=\frac{8}{3}$. **54.** $S=6$. **55.** $S=\frac{4}{3}$. **56.** $S=\frac{10}{3}$. **57.** $S=\frac{32}{3}$. **58.** $S=1$; **59.** $S=\ln 3$. **62.** $S=\frac{9}{2}$. **63.** $S=\frac{9}{2}$. **64.** $S=\frac{1}{3}$. **65.** $S=\frac{5}{3}-\frac{1}{\ln 2}$. **66.** $S=\frac{1}{12}$. **69.** 400 *га.* **70.** 1000 т. **71.** $\frac{28}{15}\pi$. **72.** $\frac{3}{2}\pi$. **73.** $\frac{2}{15}\pi$. **74.** $\frac{50}{3}\pi$. **75.** 11π. **76.** $\frac{\pi}{2}$. **77.** $\frac{16\pi}{15}$. **78.** $\frac{\pi}{6}$. **79.** $\frac{\pi^2}{2}$. **81.** 0,324 Дж. **82.** 40 см. **85.** *б)*. **86.** *а)*. **87.** *д)*. **88.** *в)*. **89.** *а)*. **90.** *б)*. **91.** *г)*. **92.** *г)*. **93.** *б)*. **94.** *а)*. **95.** *а)*. **96.** *г)*. **97.** *в)*. **98.** *б)*. **99.** *г)*. **100.** *г)*. **101.** *в)*. **102.** *б)*. **103.** *д)*. **104.** *г)*. **105.** *а)*. **106.** *б)*. **107.** *в)*. **108.** *б)* $3\ln x-\frac{4}{x}+C$. **109.** *б)* $-7\cos x+3\sin x+C$. **110.** *б)* $8\sqrt{x}+3\ln x-e^{4x}+C$. **111.** *е)* $\frac{1}{6}e^{6x-7}+C$. **112.** *в)* $\frac{1}{3}\ln x+C$. **113.** *б)* $\frac{2}{3\sqrt{3}}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}\cos(3x-1)+C$. **114.** *б)* $\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+C$. **115.** *в)* $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$. **118.** *е)* 0. **119.** *б)* 7,5. **120.** *б)* 6; *г)* 7; *е)* $2(e^6-e^3)$. **121.** *б)* $-\frac{17}{12}$. **123.** *б)* $\frac{3}{2}\ln 3$. **124.** *б)* $\frac{1}{4}$; *г)* $\frac{3\pi}{8}$; *е)* $6\ln 2-\frac{7}{2}$. **125.** 1) $x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$; *б)* $x\in(0;2)$. **126.** *б)* $1\frac{1}{3}$. **127.** *а)* $6\frac{1}{6}$; *в)* 4. **128.** *б)* $\frac{11}{12}$; *в)* $\frac{1}{6}$. **129.** *б)* $\frac{1}{6}$. **130.** *г)* 512π *куб. бир.*

Тест

I вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
б)	*а)*	*в)*	*г)*	*в)*	*а)*	*д)*	*а)*	*д)*	*б)*	*а)*	*в)*	*д)*	*в)*	*а)*	*г)*

II вариант

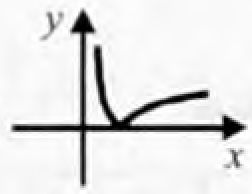
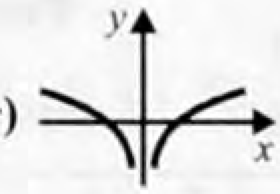
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
в)	*б)*	*г)*	*в)*	*а)*	*г)*	*в)*	*в)*	*д)*	*в)*	*в)*	*д)*	*а)*	*д)*	*д)*	*б)*

III вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
г)	*в)*	*а)*	*а)*	*б)*	*в)*	*г)*	*б)*	*г)*	*а)*	*а)*	*а)*	*б)*	*а)*	*г)*	*в)*

II бөлүм

§ 2. 14. *в)* $x=\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}$; *д)* $x=\frac{17}{13}$; *е)* $x=2$; *ё)* $x=1$; *к)* $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; *л)* $x=35$. **15.** *а)* $x=1$; *в)* $x=1$; *г)* $x=4$; *д)* $x=1$; *ё)* $x=1$. **16.** *б)* $x=2$; *в)* $x=1$; *д)* $x=4$; *е)* $x=0; 1$. *ё)* $x=0$; *ж)* $x=6$. **18.** *б)* $x<2$; *в)* $x>-1$; *д)* $x<2$; *е)* $x<2$; *ё)* $x>0$; *ж)* $x<2$; *з)* $x<-2$; *и)* $x<-2$; *к)* $x>\frac{1}{5}$; *л)* $x>\frac{4}{3}$. **19.** *д)* $x>1$; *е)* $x<0$; *ё)* $x<2$; *к)* $-1<x<\infty$. **§ 3. 21.** *а)* 2; *б)* 1; *в)* 3; *г)* 5; *д)* 6; *е)* -2; *з)* 1; *и)* 2; *к)* 0; *л)* -3. **22.** *б)* 4; *в)* -1; *г)* 0. **23.** *б)* 3; *в)* -3; *д)* -3. **24.** *б)* 16; *г)* 32; *д)* 6; *е)* 64; *ж)* 144; *и)* 1. **25.** *б)* $x=625$; *г)* $x=25$; *е)* $x=5{,}5$. **26.** *б)* $x>12$; *г)* $x>0{,}5$; *е)* $x<-3$; $x>2$; *ж)* $-\frac{5}{3}<x<4$. **27.** *а*$x=\log_{1,2}4$; *г)* $x=\frac{1}{2}(1-\log_7 2)$; *е)* $x=\log_3 4$. **§ 4. 28.** *г)* -3; *д)* 2; *е)* 3; *ё)* 2; *и)* 4; *л)* 3; *о)* -3; *р)* $1\frac{1}{3}$; *с)* 0. **29.** *б)* $\frac{2}{3}$; *г)* $-1\frac{1}{6}$; *д)* $3\frac{1}{3}$. **31.** *а)* 12; *в)* 3; *е)* $x=\frac{a^2}{b^3}$; *ё)* 4; *ж)* 8; *з)* 512; *и)* $\frac{1}{625}$. **§ 5. 32.** *б)* 0,845; *г)* $-0{,}176$; *е)* 0,693; *ж)* $-0{,}154$. **33.** *б)* 1,29; *г)* $-0{,}42$. **34.** *а)* 0,699; *г)* $-0{,}5229$. **35.** *б)* (1,3); *г)* $-15{,}42$. **36.** *а)* $\frac{4}{3}$; *в)* $-\frac{1}{6}$; *г)* $\frac{5}{4}$. **37.** *а)* $\frac{1}{3}$; *б)* 4; *в)* 3; *г)* 4; *д)* 1; *е)* -3. **38.** *а)* $\frac{18}{2a+3}$; *б)* $-(a+b)$. **39.** *б)* $x=8$; *г)* $x=3$; *е)* $x=2$. **§ 6. 40.** *а)* $x>-1$; *б)* Бардык сан көптүгү. *в)* $x<0$; *г)* $x\neq 0$; *д)* $2<x<3$; *е)* Бардык сан көптүгү; *ё)* $x>-1$; *ж)* $-6<x<6$. **42.** *в)* $\log_{\frac{1}{3}}9>\log_{\frac{1}{3}}7$; *г)* $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}>\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$; *д)* $\log_6 5>\log_8 5$; *е)* $\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}3$. **43.** *б)* $\log_3 0{,}45<$

<0; *г)* $\log_{0,5} 9,6<0$. **44.** *д)*  *е)* . **§ 7. 46.** *а)* $t=\frac{S-S_0}{V}+t_0$; *б)* $t=\sqrt{\frac{s^3}{a^3}}+t_0$; *в)* $t=t_0\ln\frac{s_0}{s}$; *г)* $t=t_0e^{\frac{s}{s_0}}-1$. **47.** *а)* $y=\frac{x+1}{5}$; *б)* $y=\sqrt{1-x^2}$; *в)* $y=1-x^2$; *г)* $y=\ln^2 x$; *д)* $y=\frac{4-x}{5}$; *ё)* $y=\frac{2x+1}{3}$; *з)* $y=\sqrt[3]{x+3}$; *и)* $y=(0,5)^x$.

48. *а)* $g(x)=\frac{x-1}{2}$; $E(g)=D(g)=R$; *в)* $g(x)=\frac{1-x}{2}$; $E(g)=D(g)=R$; *д)* $g(x)=-\frac{1}{x}$; $E(g)=D(g)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. **§ 8. 50.** *а)* -1; *б)* $-4\frac{2}{3}$; *в)* 1,0016; *г)* 4; *д)* -8; 1; *е)* 0; 3; *ё)* ± 5; *ж)* 16. **51.** *а)* 3; *б)* $\varnothing$; *в)* 4; *г)* $\frac{1}{2}$; *д)* 4; *е)* 5; 95; *ё)* 6; 14; *ж)* 4; *з)* 13. **52.** *а)* $\frac{1}{2}$; 16; *б)* 0,0001; 10; *в)* 9; 27; *г)* 0,2; 125; *д)* 0,2; 25; *ж)* 0,001; 0,1; 10; 1000. **53.** *а)* 4; *б)* $\sqrt{5}$; 25; *в)* $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; 4; *г)* $\frac{1}{4}$; 4; *д)* $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$; *е)* 3; 5. **54.** *а)* $\frac{1}{3}$; 3; *б)* $\frac{1}{8}$; 2; *в)* 25; *г)* $\frac{1}{9}$; *д)* $\frac{1}{2}$; 8; *е)* 100; *ё)* 0,1; 100; *ж)* 0,1; $10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$; $10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$. **55.** *а)* 1; *б)* $\varnothing$; *в)* $\approx 0,08$; $\approx 1,47$; *г)* $\approx 0,6$; *д)* 1,2. **56.** *а)* $x>\frac{4}{5}$; *б)* $\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}$; *в)* $2\le x\le 3$; *г)* $-1\ x<0$; $3<x\le 4$; *д)* $1\le x\le 10$; *е)* $x<0,05$; *ё)* $x>25$; *ж)* $\frac{5}{3}<x<3$. **57.** *б)* $x>7$; *в)* $x\le -1$; $x\ge 4$; *г)* $x<-0,5$; $x>3$; *д)* $x<2$; $x>3$; *е)* $x<-8$; $x>1$. **58.** *а)* $0<x<0,1$; $x>10000$; *б)* $0,1\le x\le 1000$; *в)* $0<x<\frac{1}{\sqrt{8}}$; $x>4$; *г)* $\frac{1}{2}\le x\le 4$. **59.** *а)* $\frac{\sqrt{21}-3}{2}<x<1$; $1<x<\infty$; *в)* $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}$; $\frac{5}{6}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$; *г)* $-3<x<-1$. **§ 9. 60.** *а)* e^x; *б)* $2^x\cdot\ln a$; *в)* $-\frac{\ln 3}{3^x}$; *г)* $\pi\ln\pi$. **61.** *а)* $3\cdot 5^{3x}\ln 5$; *б)* $-2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ln 3$; *в)* $2e^{2x}-\frac{\ln 3}{3^x}$; *г)* $2^{\sin x}(1+x\cos x\ln 2)$; *д)* $\frac{1-2x\ln 3}{3^{2x}}$; *е)* $\frac{(0,5)^x(1-2x\ln 2)+1}{2\sqrt{x}}$; *ж)* $7e^{-7x}-\frac{\sin\frac{x}{3}}{6\pi}$; *з)* $e^{x+1}\cdot\sec^2 e^{x+1}$. **62.** *а)* $-32805\ln 3$;

б) ln2; *в)* $\frac{3\ln 3}{\sqrt{8}}$. **64.** *б)* 1; *в)* 3; *г)* –1; *д)* $\frac{1}{2}$. **66.** *а)* $x+ey=2$; *б)* $y=\frac{1}{2}\ln(e\,2^{x+1})$.

69. *а)* $\frac{1}{x\ln 2}$; *б)* $\frac{3}{x\ln 5}$; *в)* $\frac{1}{2(x-1)\ln 0{,}1}$; *г)* $-2\sin x+\frac{1}{x}$; *д)* $x^2\ln(e\cdot x^3)$;

е) $4x\log_2 x+\frac{2x^2+5}{x\ln 2}$; *ж)* $e^x(\ln x+\frac{1}{x})$; *з)* $\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$. **70.** *а)* $\frac{1}{4\ln 2}$; *б)* $\frac{2}{3\ln 10}$;

в) $-\sqrt{3}$; *г)* $2e$; *д)* $\frac{2}{e}$. **71.** *а)* $\frac{3}{2(3x+1)}$; *б)* $\frac{4x}{5(x^2-6)}$; *в)* $-\frac{2}{3(1-x^2)}$;

г) $\frac{4x}{3(x^2-9)}$. **72.** $y=\frac{1}{e}$. **73.** 1; 0. **74.** *а)* $x>0$ болгондо кемийт; *б)* $x>1$ болгондо өсөт жана $0<x<1$ болгондо кемийт. **75.** *а)* $x=2$ болгондо функция минимумга ээ, $y_{\min}=2(1-\ln 2)$; *б)* $x=\frac{1}{e}$ болгондо функция минимумга ээ, $y_{\min}=-\frac{1}{e}$.

§ 10. 78. *а)* функция качан $-\infty<x<0$ болсо кемийт, ал эми качан $0<x<\infty$ болсо өсөт. *б)* өзүнүн аныкталуу облусунда өсөт. **79.** *а)* $(-3{,}1)x^{-4{,}1}$; *б)* $-2x^{-3}$; *в)* $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$; *г)* $3{,}5x^{2{,}5}$. **81.** *а)* 27; *б)* 9; *в)* $-\infty<x\leq 27$; *г)* $27<x<\infty$. **83.** *а)* 2,89; *в)* 2,01; *г)* 2,63; *е)* 2,0125. **84.** *з)* 2,0004; *л)* 0,1247. **85.** *а)* 2,99; *б)* 5,012; *в)* 3,949; *г)* 4,33; *д)* 13,16; *е)* 3,111; *ж)* 3,083; *з)* 2,013. **§ 11. 86.** $10\frac{2}{3}$ м. **87.** *г)* $y=2x^3-4x^2+x+C$; *д)* $y=2\sin 2x+C$; *е)* $y=\sin x+\cos x+C$. **88.** *б)* $y=2\sin x+1$; *г)* $y=2x+x^2+2$; *е)* $y=3-e^{-x}$. **90.** *в)* $y''=-9y$. **91.** $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ жыл. **92.** 0,96 *Дж.*

93. 0,09 *Дж.* **96.** $0{,}1\,x^2$. **97.** x^5; $2x$; $x^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{x}$. **98.** $\frac{10}{x^2}$. **99.** $\frac{1}{x^4}$; $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$; $\frac{2}{\sqrt{x}}$. **100.** *а)* 2^3; *б)* 2^{-1}; *и)* $2^{-\frac{11}{20}}$; *к)* $2^{\frac{7}{4}}$. **101.** *а)* $3^{\frac{3}{4}}$; *б)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{11}{6}}$. **102.** *а)* $\frac{1}{\sqrt[5]{3^6}}$;

б) $\sqrt[5]{3^2}$. **103.** *а)* a^{24}; *д)* 2^7. **104.** *а)* $2^{\frac{15}{8}}$; *б)* $a^{\frac{2}{5}}$. **106.** $13\cdot 3^{x-1}$. **115.** *а)* 1; 0; 5; –1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; *б)* 2; –1; 0; –3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **116.** *а)* 3; *д)* $-\frac{1}{2}$. **117.** *а)* 3; *б)* 9; *в)* $\sqrt{3}$; *г)* 4.

118. *а)* 1; *б)* 1; *в)* –2; *г)* 2. **121.** *а)* $N=\frac{a^3b^2}{y^4\sqrt{x}}$; *б)* $N=\frac{\sqrt{ac}^{\,-2}}{\sqrt[3]{b}}$. **122.** $\log_2 a^{-1}$; $\log_2\sqrt[3]{a}$; $\log_2 a^{-\frac{1}{2}}$; $\log_2 a^2$; $\frac{\log_2 a}{\log_2 3}$. **123.** *а)* 6; *д)* 5. **125.** *а)* $(0;\infty)$; *д)* $x<1$; *з)* $(1;\infty)$.

127. *а)* $\log_3 2>0$; *д)* $\log_3 4>1$; *и)* $\log_{\frac{1}{3}} 7> \log_{\frac{1}{3}} 10$; $\log_5 2>\log_6 2$. **129.** *а)* $y'=a$

д) $y'=\frac{5}{5x+1}$. **131.** *а)* $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$, $y(e)=1$; *б)* $y(1)=2$; $y(100)=8$; *в)* $y(1)=1$

$y(e)=e-1$; *г)* $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$, $y(1)=2$. **133.** *а)* $x=\frac{3}{2}$; *д)* $x=\frac{1}{2}$; *л)* $x=\log_2 3$; *р)* $x=2$

134. *а)* $x=16$; *д)* $x=0$; $x=3$; *и)* $x=-1$. **135.** *а)* $x=1$; *д)* $x=2-\log_2 3$. **136.** *а)* $x=3$;

д) $x=\pm 1$; *и)* $x=0$. **137.** *а)* $x=1$; $x=\frac{1}{4}$; *и)* $x=100$; $x=\frac{1}{100}$; *к)* $x=3$; $x=9$.

138. *а)* $x\le 1$; *ж)* $(-\infty;\infty)$; *с)* $(1;3)$. **139.** *а)* $x>10$; *д)* $x\le -99$; *и)* $3<x<5$; *н)* $x\ge 6$.

140. *а)* $x=1$, $y=2$; *д)* $\begin{cases} x=100, \\ y=\frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{10}, \\ y=100. \end{cases}$ **141.** *а)* $x=1$; *б)* $x=1$; *в)* $x=2$; *г)* $x=3$;

д) $x=2$; *е)* $x=1$; *ж)* $x=1$; *з)* $x=9$. **142.** *а)* $x=\frac{4-5y}{3}$, $y=\frac{4-3x}{5}$; *в)* $x=-\ln y$, $y=\frac{1}{e^x}$;

г) $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$. **143.** *а)* $t=\frac{S-S_t}{v}+t_0$; *б)* $t=\sqrt{\frac{S^3}{a^3}}+t_0$; *в)* $t=t_0\ln\frac{S_0}{S}$;

г) $t=t_0\left(e^{\frac{S}{S_0}}-1\right)$. **144.** *а)* $y=\frac{x+1}{5}$; *в)* $y=\sqrt{1-x^2}$; *г)* $y=1-x^2$; *д)* $y=\ln^2 x$.

г) $y=e^{e^x}$. **145.** *а)* $y=2x+2$; *в)* $y=\sqrt[3]{x}$, $x\ge 0$; *г)* $y=-\ln x$; *д)* $y=e^x+1$; *е)* $y=\sqrt{x}$.

146. *а)* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$; *б)* $y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; *г)* $y'=\frac{1}{1-x^2}$.

III бөлүм

2. *в)* алгебралык; *д)* алгебралык; *е)* трансценденттик, себеби $\sqrt{x^2}=|x|$.

3. *а)* 4; *д)* 3; *е)* −2. **5.** *г)* [1; 6]; *д)* $[0;\frac{8}{5}]\cap[\frac{5}{2};\infty)$; *е)* $(-\infty;-2]\cup(-1;0]\cup(7;\infty)$.

6. *а)* 3, 5; *б)* −2,5; *в)* −6; *г)* 8; *д)* $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. **7.** *а)* −7; *б)* −5; *в)* 2; *г)* −3; *д)* 4; *е)* −1.

8. *а)* $\varnothing$; *б)* 4; *в)* −1; *г)* −2; *д)* 2; *е)* −3. **9.** *а)* 3; *б)* 8; *в)* 2; *г)* 2; *д)* 4; *е)* 3. **10.** *а)* 9; *б)* 10; *в)* 9; *г)* 2; *д)* 2; *е)* −1. **11.** *а)* 2; *б)* −2; *в)* −2; *г)* −1; *д)* −1; *е)* 0. **12.** *а)* (4; 2);

б) (4; 2); *в)* (3; 2); *г)* (2; 1); *д)* (2; 4); *е)* (1; 1). **13.** *а)* $\frac{\pi}{3}$; *б)* $\frac{\pi}{2}$; *в)* $-5°$; *г)* $180°$;

д) $\frac{\pi}{6}$; *е)* $\frac{\pi}{2}$. **14.** *а)* 1; *б)* 4. **15.** *а)* $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; *б)* $\varnothing$; *в)* $\left(\frac{-7\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; *г)* $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; *д)* $(\text{ctg}2; \infty) \cup (-\infty;\ \text{ctg}3)$; *е)* $(-\infty;\ \text{tg}1)$. **16.** *а)* $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi m\right)$, $n, m \in Z$; *б)* $(2\pi n, 2\pi m+\pi)$; *в)* $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi m\right)$, $n, m \in Z$; *г)* $\left(n; \frac{4n+1}{4}\right)$, $\left(\frac{4n-1}{4}; n\right)$, $n \in Z$. **17.** 120. **18.** 165°. **19.** *в)* 1. **20.** *г)* −1. **21.** *в)* 2. **22.** *г)* 4. **23.** *д)* 5. **24.** *г)* 1. **25.** *г)* 30. Көрсөтмө. $x(x-1) = 870$ квадраттык теңдемесин чыгаруу керек. **26.** *в)* 4. **27.** *г)* 6. **28.** *г)* 5. **31.** *в)* $\pm\sqrt{17}$; *д)* 247; *е)* −28. **32.** *а)* $a \geq \frac{3}{2}$, $x=(2a-3)^2$; *б)* $a \in R$, $x=(1-a^2)^3+8$; *в)* $a \leq 1$, $x = \left(\frac{1-a^3}{1+a^2}\right)^4$; *г)* $a \in [1; 8]$, $t=-1+(9a-a^2-8)^2$; *е)* $a \in [-2; \frac{1}{3}) \cup (1; 2]$, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4-a^2}{3a^2-4a+1}\right)$. **33.** *а)* $x=1$; *б)* $[1; 12)$; *в)* $x \neq 5$; *г)* $x \in R$; *д)* $\varnothing$; *е)* $x=\frac{1}{2}$ –АО жана тамыр. **34.** *а)* 1; *б)* 4; *в)* 2; *г)* 9; *д)* $\varnothing$; *е)* $\varnothing$. **35.** *а)* 5; *б)* 1; *в)* 5; *г)* 1; *д)* −1; *е)* 5. **36.** *а)* 2; *б)* $-\sqrt{3}$; *в)* ± 5; *г)* ± 4; *д)* 14; *е)* 19. **37.** *а)* 3; *б)* −1; *в)* 20; *г)* 2; *д)* 6; *е)* 5. **38.** *а)* −3; *б)* $\left\{-1; \frac{9}{16}\right\}$; *в)* 3; *г)* 5; *д)* −1; *е)* 4. **39.** *а)* 2; *б)* 2; *в)* 5; *г)* 0; *д)* $\{5;10\}$; *е)* $\{-4;0\}$. **40.** *а)* −10; *б)* −45; *в)* $\{2; 3; 2{,}5\}$; *г)* $\{-3; 4\}$; *д)* −2; *е)* 0. **41** *а)* $\{16; 81\}$; *б)* $\{-17; 23\}$; *в)* $\left\{\frac{2}{7}; -5\right\}$; *г)* 1. **42.** *а)* 64; *б)* $\{1; 2; 10$; *в)* 68; *г)* 64. **43.** *а)* $\{-1; 2\}$; *б)* $\{-3; 2\}$; *в)* $\{-1; 2\}$; *г)* −3; *д)* $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; *е)* $\{0; 5\}$. **44.** *а)* $\{0; 1\}$; *б)* $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$; *в)* $3+\sqrt{10}$. **45.** *а)* 0; *б)* $\varnothing$; *в)* 2; *г)* 1. **46.** *а)* 1; *б)* $\varnothing$; *в)* −1. **47.** *а)* $\{-21; 21\}$; *б)* $\{-2{,}4; 5\}$; *в)* $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; *г)* $\{-a; a\}$. **48.** *а)* −27000; *б)* 5; *в)* 25; *г)* $\{-1; 1\}$. **49.** *а)* $\varnothing$; *б)* 1; *в)* $x \in [-2; 1]$; *г)* $x=2$, $y=9$. **50.** *а)* $x = \frac{2a+1}{a-2}$, $a > 2$ жана $a \leq \frac{1}{3}$ болгондо; $x \in \varnothing$, $a \in (\frac{1}{3}; 2]$ болгондо; *б)* $2|a|$, $a \neq 0$. **51.** 4. **52.** 0. **53.** 0. **54.** 3. **55.** *г)*. **56.** *д)*. **57.** *в)*. **58.** *г)*. **59.** *б)*. **60.** *а)*. **61.** *в)*. **62.** *д)*. **63.** *в)*. **64.** *г)*. **65.** *б)*. **66.** *д)*. **67.** *в)*. **68.** *б)*. **69.** *а)*. **70.** *г)*. **71.** *в)*. **72.** *д)*. **75.** *в)* 31;

г) $\frac{5}{2}$; *д)* $x=3$; *е)* $x<1$. **76.** *б)* $(-1;\ 0)\cup(3;\ 4]$; *в)* $\left(-\infty;\ \frac{2\sqrt{21}}{3}\right]$; *г)* $[-3;\ \infty)$. **77.** *б)* $[10;\ 20)$; *в)* $x=25$; *г)* СЖнын АО. **78** *а)* $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; *б)* $\left(\frac{12}{25};\ \frac{1}{2}\right)$; *в)* $(6;\ \infty)$; *г)* $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$; *д)* $(2;\ \infty)$; *е)* $[4;\ \infty)$. **79.** *а)* $[3;\ \infty)$; *б)* $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right)$; *г)* $[-3;\ 1)$; *д)* $(-\infty;\ -3)$; *е)* $[-2;\ 2)$. **80.** *а)* $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)$; *б)* $[-18;\ -2)$; *в)* $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$; *г)* $[1;\ 6]$; *д)* $\left(\frac{24}{19};\ \infty\right)$; *е)* $[-3;\ 1)$. **81.** *а)* $[-2;\ \infty)$; *б)* $(4;\ \infty)$; *в)* $[-1;\ 1]$; *г)* $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2},1\right]$; *д)* $(1;\ 2]$; *е)* $x\in\varnothing$. **82.** *а)* $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$; *б)* $(-\infty;\ -9]\cup[9;\ 15)$; *в)* $\left[1;\ \frac{46}{19}\right)$; *г)* $\left(\frac{3}{4};\ 2\right)$; *д)* $[-6;\ 0)\cup(3;\ 4]$; *е)* $[5;\ 21)$. **83.** *а)* $[1;\ \infty)$; *б)* $(0;\ 64)$; *в)* $(-\infty;\ 1)$; *г)* $[1;\ 121]$; *д)* $x\neq2$; *е)* $\left(1;\ \frac{144}{49}\right)$. **84.** *а)* $(-\infty,\ 5]$; *б)* $x\in\varnothing$; *в)* $x=49$; *г)* $\left(-\infty;\ \frac{9}{2}\right)$). **85.** *а)* $\{-2;\ 1\}\cup[3;\ \infty)$; *б)* $[-1;\ \infty)$; *в)* $[-3;\ 6]\cup(8;\ \infty)$; *г)* $(-\infty;\ -6)\cup(-5,0)$; *д)* $[-2;\ 4]$; *е)* $[-4;\ 1]\cup\{2\}$. **86.** *а)* $(1;\ \infty)$; *б)* $(2;\ \infty)$. **87.** 0. **88.** 14. **89.** 5. **90.** 9. **91.** 6. **92.** 25. **93.** 5,75. **94.** 4,5. **95.** *в)* $x=1$, $x=\pm2$. **96.** *в)* $x=0$, $x=\sqrt[3]{9}$. **97.** *а)* $\varnothing$; *б)* $x=1$; *в)* $[3;\ \infty)$; *г)* ±3; *д)* $x=-40$; *е)* 4. **98.** *а)* $\varnothing$; *б)* $-\frac{1}{4}$; *в)* $-7{,}5$; *г)* $x=-5$; $x=2$; *д)* -1; *е)* $(-\infty,\ -3]$. **99.** *а)* $\left\{\frac{10}{3};\ 2\right\}$; *б)* -2; *в)* $[2;\ 4]$; *г)* $\{-5;\ 1\}$; *д)* $\left\{-1;\ \frac{2}{3}\right\}$; *е)* $\{-4\}\cup[-1,0]$. **100.** *а)* $\varnothing$; *б)* 7; *в)* $\varnothing$; *г)* $(-\infty;\ -5)\cup(-3;\ \infty)$; *д)* $(-\infty;\ -5)\cup[3;\ \infty)$; *е)* $(-1;\ 7)$. **102.** *а)* $(-1;\ 2)\cup(3;\ 6)$; *б)* $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ \infty)$; *в)* $[-1;\ 5]$; *г)* $(-\infty;\ -3]$; *д)* $[4;\ 5)\cup(5;\ \infty)$; *е)* $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty)$. **103.** 2. **104.** 12. **105.** 1. **106.** 13. **107.** *а)* $(1;\ 2)$; *б)* $(7;\ 8)$ *в)* $(8;\ 7)$. **108** $(1;\ 2;\ 1)$; *б)* $(2;\ 3;\ 1)$. **109.** *а)* $(17;\ 10)$, $(4;\ -3)$; *б)* $(4;\ 25)$, $(25;\ 4)$; *в)* $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$; *г)* $(3;\ 0)$, $(1;\ -2)$. **110.** *а)* $(4;\ 3)$, $(4,\ -3)$, $(-5;\ 0)$; *б)* $(5;\ 4)$, $(4;\ 5)$. **111.** *а)* $(17;\ 10)$, $(17;\ -10)$; *б)* $(-8;\ -1)$, $(-1;\ -8)$. **112.** *а)* $\left(-\frac{9}{5};-\frac{16}{5}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{16}{5}\right)$; *б)* $(1;\ 1)$. **113.** *г)*. **114.** *в)*. **115.** *б)*. **116.** *а)* $(2;\ 5)$; *б)* $[3;\ 4)$. **117.** *а)* 3. **118.** *а)* $\left(\frac{1}{3};\ 6\right)$; *б)* $\left\{0;\ \frac{1}{2}\right\}$. **120.** -2. **121.** 10. **122.** *а)* ооба; *б)* жок, $f(x)=1-x$, $g(x)=x-2$ деп карап көргүлө; *в)* ооба; *г)* ооба. **123.** Баарында:

ооба. **124.** *а)* $\Leftrightarrow$; *б)* экинчи тендеме – натыйжа. **125.** *а)* жок, АО: $x\geq0$; *б)* жок, АО: $x=1$; *в)* ооба; *г)* ооба; *д)* жок; *е)* ооба. **126.** *а)* жок, $x=1$ да тамыр; *б)* ооба. **130.** *в)* 10; *е)* 6. **131.** *а)* 2; *б)* 0; *в)* 2; *г)* $\{0;\ 4\}$; *д)* 2; *е)* $\left\{-\frac{9}{2};2\right\}$. **132.** *а)* 2; *б)* 5; *в)* 1; *г)* 5. **133.** *а)* -3; *б)* -9; *в)* 5; *г)* 0; *д)* 12; *е)* $\{-1;\ 3\}$. **134.** *а)* 1; *б)* 1; *в)* 3; *г)* 16;

д) 9; *е*) −3. **135.** *а*) {0; 1}; *б*) −7. **136.** *а*) $\left\{\frac{12}{5};5\right\}$; *б*) {−19; 10}; *в*) 10; *г*) {−2; 6}. **137.** *а*) {−4; 7}; *б*) −1; *в*) $\left\{\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$; *г*) [−2; 3]; *д*) (3; ∞); *е*) {5}∪[1, 2]. **138.** *а*) (1; 2); *б*) $\left(\frac{21}{41};\frac{8}{41}\right)$; *в*) (8; 4; 2). **139.** *а*) $\left(\frac{128}{13};\frac{2}{13}\right)$, $\left(\frac{2}{13};\frac{128}{13}\right)$; *б*) (2; 2), (2; −2), (−2; 2), (−2; −2); *в*) $\left(-\frac{9}{2};\frac{41}{12}\right)$, (4; 2). **140.** *б*) (−∞, −5]∪[3; ∞); *в*) (−∞; 2)∪{3}∪(4; ∞); *г*) {2}∪[3; 11]; *д*) (−∞;−199)∪ (−66; 200); *е*) (−∞;−3]∪[3; ∞). **141** *а*) (−∞; 1); *б*) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty\right)$; *г*) (1; ∞); *д*) {−1}∪[2; ∞); *е*) $\left[-1;\frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right]$. **142.** *а*) (−1; 0)∪(3; 6); *б*) x=1,5. **143.** *а*) жок; *б*) жок; *в*) ооба. **144.** *а*) жок; *б*) ооба. **145.** 1) 4; 2) 5. **146.** 16. **147.** −1. **148.** 1. **149.** 3.

IV бөлүм
Кайталоо үчүн көнүгүүлөр

1. *а*) $F(x)=\frac{2}{5}x^2+10x$; *б*) $F(x)=3x^3+\frac{11}{2}x^2+7x$. *г*) $F(x)= =18\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{2\ln 7}7^{2x}$. **2.** *а*) $F(x)=-2e^{-2x}-\mathrm{ctg}4x+\frac{1}{2}\ln x$; *г*) $F(x)=-\frac{3}{7}\cos 7x-\frac{4}{7}\sin 7x-\ln(\cos x)$. **3.** *а*) $F(x)=\frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\,x)+\frac{1}{3}\sin 9x-2\cos 2x+x$; *в*) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+8\sin\frac{x}{2}-24\cos\frac{x}{4}$; *г*) $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-\ln(x+1)+4\ln(x-2)$. **4.** *а*) $F(x)=-2\mathrm{ctg}2x+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\ln x+C$, C– каалагандай турактуу сан; *в*) $F(x)=\frac{8}{3}(x+10)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(5x+10)^{\frac{3}{2}}+C$. **5.** *а*) $F(x)=8\sqrt{x+10}+\frac{2}{5}(x+2)^2+C$; *в*) $F(x)=\frac{1}{5}e^{5x+4}-\frac{1}{2\ln 9}9^{2x+1}-\frac{1}{3\ln 7}7^{-3x+4}+C$. **6.** *б*) $F(x)=\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{3}})-\arcsin(x-2)+C$; *г*) $F(x)==\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x+C$. **7.** *а*) $F(x)=\frac{4}{3}x^3-x^2+x+\frac{13}{3}$. **8.** *б*) $F(x)=-3e^{-x}+4e^x+3$. **9.** *б*) $F(x)=x-3\ln\frac{x+3}{7}+2$. **10.** *а*) $x^4-2x^3+x^2+x+C$, C – каалагандай турактуу сан; *в*) $4\ln x+\frac{2}{5x^2}+C$; *е*) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}-6\sin\frac{1}{3}x+C$. **11.** *а*) $\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}-5\ln x-\frac{6}{\ln 3}3^{-x}+C$;

г) $\frac{9}{4}(6x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$. **12.** *а)* $\frac{16}{9}x^{\frac{9}{4}}+\frac{4}{13}x^{\frac{13}{4}}+C$; *д)* $\frac{1}{7}\sin 7x+C$.

13. *б)* $1{,}5+\ln 2$; *е)* $\frac{1}{4}(e^{8}-1)$. **14.** *а)* 2; *д)* 0. **15.** *а)* $\frac{5}{2}$; *г)* $\frac{1}{4}\ln 5$; *е)* $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. **16.** *а)* $\frac{5}{6}$; *в)* $\frac{\pi}{16}$. **17.** $\frac{9}{2}$. **19.** $\frac{32}{3}$. **21.** $\frac{9}{2}$. **24.** $\frac{9}{2}$. **27.** 1) $\frac{223}{5}\pi$. **29.** 1) π. **30.** 1) 8π.

32. 2) $\frac{48}{5}\pi$. **34.** 2) $\frac{1}{6}\pi$. **35.** $\frac{1}{4}$. **36.** $f(4)=\sqrt[3]{12}$, $f(7)=-\sqrt[3]{21}$; $f(9)=-3$. **38.** *а)* 2^{7}.

42. $N=\frac{\sqrt{a}}{c\sqrt[3]{b}}$. **43.** *а)* 5. **44.** *а)* $\log_5 2> >\log_6 2$. **53.** $x=2\log_2 3$. **60.** $x=0$. **62.** $x=100$. **63.** $x=3$, $x=9$. **67.** (1; 3). **73.** Биринин да чыгарылышы жок. **74.** *а)* 1; *б)* 5; *в)* $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; *г)* ± 2; *д)* 775; *е)* 4. **75.** *а)* $\{15;-12\}$; *б)* 5; *в)* 5; *г)* $\{-1;-2\}$; *д)* $\frac{28}{27}$; *е)* 4. **76.** *а)* 4; *б)* $\{-5;\ 4\}$; *в)* $\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$; *г)* $\{-15;\ 13\}$; *д)* о; *е)* $\{-88;\ -24;\ 3\}$. **77.** *а)* ± 1; *б)* $\{0;\ -1\}$; *в)* 6; *г)* -1; *д)* $\{-61;\ 4\}$; *е)* $\{-14;\ 5\}$. **78.** *а)* $\{-a;\ 1-a\}$; *б)* $\frac{2\sqrt{2a}}{3}$, $a>0$; *в)* $\pm\sqrt{5}$; *г)* 17; *д)* 1; *е)* $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **79.** *а)* $5\le x\le 10$; *б)* $\frac{25}{16}$; *в)* $\{0;\ 3\}$; *г)* 1. **80.** Биринин да чыгарылышы жок. **82.** *в)* $(-\infty;\ 3)$; *г)* $(4;\ \infty)$; *д)* 10; *е)* $3<x<4$. **83.** *а)* 5; *б)* $[4;\ \infty)$; *в)* $[0;\ 3]$; *г)* $(-\infty;\ 1]\cup(5;\ \infty)$; *д)* $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup[1;\infty)$; *е)* $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$. **84.** *а)* $(-3;\ 1)$; *б)* $[-6;\ 0)\cup(3;\ 4]$; *в)* $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3},\ \infty\right)$; *г)* $\varnothing$; *д)* $(-\sqrt{13};\ 1]\cup[2;\ \sqrt{13})$. **85.** *в)* $(0;\ 81]$. **86.** *б)* $\{2;\ 4\}$; *в)* $\{-1;\ -3\}$; *г)* $\{-7;\ -1\}$; *д)* ± 3; *е)* $[1;\ \infty)$. **87.** *а)* $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup[3;\ \infty)$; *б)* $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ \infty)$; *в)* $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(0;\ \infty)$; *г)* $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 1)\cup(2;\ \infty)$; *д)* $[-2\sqrt{2};\ 0)\cup(0;\ 2\sqrt{2}]$. **88.** *б)* $\left(\frac{2}{17};\frac{76}{17}\right)$, (2; 4); *в)* $(-3;\ -2)$, $(3;\ 2)$; *г)* (2; 1), $(-1;\ -2)$. **89.** *а)* $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$; *б)* (2; 2); *в)* $(-4;\ 3;-1)$. **90.** *а)* $\varnothing$; *б)* $(-2;\ 1]\cup[1;\ 4]$; *в)* $(1;\ 3]$; *г)* $[3;\ 4)$. **91.** *в)*. **92.** $x_1x_2=-4$. **93.** *д)*. **94.** *г)*. **95.** *в)*. **96.** *б)*. **97.** *в)*. **98.** *б)*. **99.** *д)*. **100.** *г)*. **101.** *в)*. **102.** *д)*. **103.** *г)*. **104.** 9. **106.** *в)*. **107.** *б)*, себеби $(1;\ -1;-1)$ – чыгарылыш.

ТАКТАГЫЧ МААЛЫМАТТАР

Негизги белгилөөлөр

$N=\{1, 2, 3,...,\}$ – натуралдык сандардын көптүгү;
$Z=\{0 ; \pm 1, \pm 2, \pm 3,...,\}$ – бүтүн сандардын көптүгү;
$Z^{+}=\{0,1, 2, 3,...,\}$ – терс эмес бүтүн сандардын көптүгү;

Q – рационалдык сандардын көптүгү;
I– иррационалдык сандардын көптүгү;
R – анык сандардын көптүгү;
C– комплекс сандардын көптүгү;
∞ – чексиздин символу;

$a\in A$– a элементи A көптүгүндө жатат; $a\notin A$ же $a \overline{\in} A$– a элементи A көптүгүндө жатпайт;

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – $a_1, a_2, ..., a_n$ элементтеринен турган көптүк;

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ – $a_1, a_2, ..., a_n$– элементтеринин жолчосу;

$\{a_n\}$– $n\in N$ же $n\in Z^{+}$ болгондогу a_n сандарынын удаалаштыгы, б. а. $a_1, a_2, ..., a_n,...$;

$\{a /\alpha\}$ – α касиетине ээ болгон бардык элементтердин көптүгү;

$B\subset A$ – B көптүгү A көптүгүнө камтылган;

$A\cup B$ – A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү, б. а. $A\cup B=\{x/x\in A$ же $x\in B\}$;

$A\cap B$ – A жана B көптүктөрүнүн кесилиши, б. а. $A\cap B=\{x /x\in A$ жана $x\in B\}$;

$A\setminus B$ – A менен B көптүктөрүнүн айырмасы б. а. $A\setminus B=\{x:|x\in A$ жана $x\notin B\}$;

$A\times B$ – A жана B көптүктөрүнүн түз (декарттык) көбөйтүндүсү, б. а. $A\times B=\{(a, b)|\ a\in A$ жана $b\in B\}$;

$[a, b]=\{x\in R\,|\,a\le x\le b\}$ – сегмент;

$(a, b)=\{x\in R\,|\,a< x<b\}$ – интервал;

$[a, b)=\{x\in R\,|\,a\le x<b\}$ – жарым сегмент;

$(a, b]=\{x\in R\,|\,a< x\le b\}$ – жарым интервал;

$f: A\to B$ – аныкталуу облусу A да жана маанилеринин облусу B да жаткан f функциясы;

f^{-1}– f функциянын тескери функциясы;

f^{n} – $f: A\to A$ түрүндөгү n функциянын суперпозициясы;

f' – f функциянын (биринчи) туундусу;

f''– f функциянын экинчи туундусу;
f'''– f функциянын үчүнчү туундусу;
$f^{(n)}$ – f функциянын n – туундусу;
$\nearrow$, $\searrow$, $\rightarrow$ – өсөт, кемийт жана пределге умтулат (функция жөнүндө) деген белгилер;
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$ – келип чыгат, тең күчтүү деген белгилер;
$D(f)$ – f функциянын аныкталуу облусу;
$R(f)$ – f функциянын маанилеринин облусу;
Δf – f функциянын өсүндүсү;
df – f функциянын дифференциалы;
$degP$ – P көп мүчөнүн даражасы;
i – жалган бирдик б.а. $i^2=-1$;
π – радиусу 1 ге барабар болгон жарым айлананын узундугу;
$e=2,718281828459045...$– иррационалдык сан жана натуралдык логарифмдин негизи;
ln – натуралдык логарифм;
Sign – белги функциясы б. а.

$$\mathrm{Sign}(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0.\end{cases}$$

$[x]$ – x санынын бүтүн бөлүгү,
$\{x\}$ – санынын бөлчөк бөлүгү, $0\le\{x\}<1$: мында $x=[x]+\{x\}$.

$|x|$ – x санынын модулу б. а. $|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\-x, x<0.\end{cases}$

Rez– z комплекс санынын чыныгы бөлүгү;
Imz – z комплекс санынын жалган бөлүгү, мында $z=Rez+i\,Imz$;

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ – $z=x+iy$ комплекс санынын модулу;
$argz$ – z комплекс санынын аргументи;
$\bar{z}=x-iy$ саны $z=x+iy$ комплекс санынын түйүндөшү;
$max\,\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ –$x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын эң чоңу;
$min\,\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ –$x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын эң кичинеси;

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+ ...+x_n$ б. а. $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын суммасы;

$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1\cdot x_2\cdot ... \cdot x_n$ б. а. $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын көбөйтүндүсү;

$n\,!=1\cdot 2 ... n$ – n санынын факториалы;

$C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ – биномиалдык коэффициент;

$\overline{a_1 \ldots a_n}$ – n орундуу сандын кандайдыр эсептөө системасындагы жазылышы;
$a \equiv 0(mod b)$ a бүтүн саны b бүтүн санына калдыксыз бөлүнөт;
$a \equiv b(mod c)$ – a саны b саны менен c модулуна карата салыштырмалуу б.а. $a - b$ саны c санына калдыксыз бөлүнөт.
$[a_1, a_2, ..., a_n]$ – $a_1, a_2, ..., a_n$ бүтүн сандарынын **эң кичине жалпы эселүүсү** б.а. берилген бүтүн сандардын бардыгына калдыксыз бөлүнгөн натуралдык сандардын эң кичинеси ;
$(a_1, a_2, ..., a_n)$ – $a_1, a_2, ..., a_n$ бүтүн сандарынын **эң чоң жалпы бөлүүчүсү** б. а. берилген бүтүн сандардын бардыгын калдыксыз бөлө турган натуралдык сандардын эң чоңу;

$\int f(x)\,dx$ – f функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрдөгү жазылышы б. а. аныкталбаган интегралы;

$\int_a^b f(x)\,dx$ – f функциянын $[a; b]$ сегментиндеги интегралы; б. а. аныкталган интегралы.

Функциялар жана графиктер

1. $y=kx+b$ – сызыктуу функция, графиги – түз сызык.
2. $y=ax^2+bx+c$ – квадраттык функция, графиги – чокусу $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ болгон парабола.
3. Бөлчөктүү – сызыктуу функциялар: $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.
4. Рационалдык функцияларга мисалдар: $y=x+\frac{1}{x}$, $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}$, $y=\frac{x}{x+1}$.
5. $y=a^x$, $(a>0,\ a\neq1)$ – көрсөткүчтүү функция.
6. $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$ – логарифмдик функция.
7. Тригонометриялык функциялар: $y=\sin\omega x$, $y=\cos\omega x$, $y=\mathrm{tg}\,\omega x$, $y=\mathrm{ctg}\,\omega x$.
8. Тескери тригонометриялык функциялар: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Туюнтмаларды өзгөртүү

1. Алгебралык туюнтмалар:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\left(1 - \frac{\frac{ad-bc}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right).$$

2. Экспоненталар жана логарифмдер

$$a^{\log_a x} = x,\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ a^x = e^{x\ln a},\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},\ \log_a x^k = k\log_a x,\ \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x,\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

3. Тригонометриялык функциялар

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x, \quad \operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x,$$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{ctg}x, \quad 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{tg}x,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha, \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + (\sin(\alpha -$$

$$- \beta)), \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)), \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+$$

$$+\beta) + \cos(\alpha-\beta)), \quad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

4. Тескери тригонометриялык функциялар

$\sin(\arcsin x)=x$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$, $\cos(\arccos x)=x$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$, $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x$,

$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{arcctg}(-x)=-\mathrm{arcctg}\,x$, $\sin(\arccos x)=$
$=\sqrt{1-x^2}$, $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $\sin(\mathrm{arctg}\,x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\mathrm{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Туундулар жана интегралдар

$(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(\lambda u)'=\lambda u'$, $\lambda\in R$;
$(u(ax))'=a\,u'(ax)$, $(u^n)'=nu^{n-1}\,u'$,
$(uv)'=u'\,v+uv'$, $(u(v(x))'=u'(v)v'$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Жакындаштырып эсептөө үчүн формулалар

$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2$, $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x-\frac{n-1}{2n^2}x^2$,

$(1+x)^k\approx 1+kx+\frac{k(k-1)}{2n^2}x^2$, $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$,

$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$, $\mathrm{tg}\,x\approx x+\frac{x^3}{3}$, $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}$.
Мында x – нөлгө жакын сан.

Ньютондун биному

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,a^{n-k}b^k.$$

МАЗМУНУ

Иманалиев Мурзабек, Асанов Авыт,
Жусупов Калыгул, Искандаров Самандар

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
XI классы үчүн окуу китеби

Жооптуу редактор *Д. Андашев*
Редактору *Ж. Асанова*
Мукабасын жасалгалаган сүрөтчү *А. Касымалиев*
Тех. редактору *Ж. Жолдошева*
Компьютердик калыпка салган *Т. Сандыбаева*

ИБ № 244

Басууга 04.12.09 кол коюлду. Кагазы офсетная. Мектеп ариби.
Форматы $60\times90^1/_{16}$. 18,0 накта басма табак.
Нускасы 47973. Заказ К0906026.

Мамлекеттик тил жана энциклопедия борбору.
7200040, Бишкек шаары, Эркиндик проспекти, 56

«Continent Print» ЖЧКсында басылды.
720054 Бишкек ш., Интергельпо көчөсү, 1.
тел.: (0312) 65 55 56
e-mail: postmaster@continent.kg

33